

振り子の「小さい角」を数にすると、10度で一日 164.78 秒ずれる

— 振幅 2 度なら 6.58 秒/日、30 度なら 1504.12 秒/日 (25 分) — 170 度でも周期は 2.4394 倍にしかならず、3 倍になるのは 175.8765 度である — 発散は 180 度の直前でしか効かない — [論文396]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

「振り子は振幅が小さければ等時である」と習う。本稿が問うのはどれだけ小さければよいのかである——10度でも一日 164.78 秒ずれ、時計としては使えない。新しい定理も法則も主張しない。第一に、周期比は $T/T_0 = (2/\pi)K(\sin^2(\theta/2))$ で、第一種完全楕円積分で書ける (第1節)。第二に、振幅 1 度で 1.64 秒/日、2 度で 6.58 秒/日である (第2節)。第三に、これが本稿の芯である。10 度では 164.78 秒/日ずれる。二分四十五秒である (第2節)。第四に、30 度では 1504.12 秒/日 (25.07 分)、90 度では 4.33 時間ずれる (第2節)。第五に、ところが 170 度でも 2.4394 倍にしかならず、3 倍になるのは 175.8765 度である (第3節)。第六に、分離子は「復元力が変位に比例するか、 $\sin$ に比例するか」である (第5節)。

本稿の射程 (射程注記)：新しい定理も法則も主張しない——単振り子の厳密周期、楕円積分による表現、ホイヘンスのサイクロイド振り子はすべて既知である。時計を設計しない——脱進機や温度補正は主題ではない。幾何と力学だけを見る。減衰を扱わない——空気抵抗や軸受の摩擦は主題ではない。保存系だけを見る。実測を主張しない——実際の振り子時計の精度は本稿の外である。式が与える値だけを言う。剛体を扱わない——質点の単振り子だけを扱い、実体振り子の慣性モーメントは主題ではない。駆動を扱わない——振幅を保つための力の供給は主題ではない。既刊との関係：論文379 は「二倍の温度」に三つの答があることを示した——ここでは「小さい角」という語に数が入っていない。論文391 は有義波高が平均でも最大でもないことを示した——どちらも、言葉が数を隠している。論文392 は沸点が物質と圧力の対の性質であることを示した——ここでは周期が長さで振幅の対の性質である。論文300 は同根か別根かが判定できることを示した——調和振動子と単振り子は、その基準で別根である。加えたのは、七つの振幅で周期比と一日の狂いを数に出したこと、10 度で 164.78 秒/日という値を出したこと、170 度でも 3 倍に届かないことを示したこと、3 倍になる振幅 175.8765 度を求めたこと、分離子を「復元力が何に比例するか」に置いたことである。

1. 記法と問い

設定：長さ ℓ の単振り子の運動方程式は $\ddot{\theta} = -(g/\ell) \sin \theta$ である。振幅 θ での周期を、微小振幅の周期 $T_0 = 2\pi\sqrt{\ell/g}$ で割ると

$$\frac{T}{T_0} = \frac{2}{\pi} K\left(\sin^2 \frac{\theta}{2}\right)$$

となる（ K は第一種完全楕円積分）。以下、算術幾何平均で K を計算する。

観察 1.1

等時性は $\sin \theta \approx \theta$ の近似から出ている。方程式そのものは等時ではない——近似を外せば、周期は振幅に依存する。

観察 1.2

「小さい」という語に数が入っていない。どこまでが小さいのか——それを決めるのは、要求される精度である。

観察 1.3

時計にとっての精度は、一日あたりの秒で測られる。 $(T/T_0 - 1) \times 86400$ ——この量で「小さい」を定義する。

問い：振り子の「小さい角」は、何度までか。

2. 10 度で、一日 164.78 秒

計算 2.1：振幅に対する周期比と一日の狂い（本稿で計算）。

振幅 [度]	T/T_0	一日の狂い [秒]
1	1.000019039	1.64
2	1.000076160	6.58
5	1.000476172	41.14
10	1.001907188	164.78
30	1.017408798	1504.12
90	1.180340599	15581.43
170	2.439362720	124360.94

観察 2.2

これが本稿の芯である。10 度は、直感的には十分「小さい」——それでも一日 164.78 秒、二分四十五秒ずれる。

観察 2.3

2 度まで下げて、ようやく 6.58 秒／日になる。実用の振り子時計が振幅を数度に抑えているのは、このためである——「小さい」の意味が、要求精度から逆算されている。

観察 2.4

狂いは振幅の二乗で増える。1 度の 1.64 秒から 2 度の 6.58 秒へ、ほぼ四倍—— $1 + \theta^2/16$ の近似が、この領域では効いている。

観察 2.5

30 度では 1504.12 秒（25.07 分）。一日で二十五分——時計として意味をなさない。

観察 2.6

90 度では 15581.43 秒（4.33 時間）。水平から離す——それでも周期はまだ 1.18 倍でしかない。

3. 170 度でも 3 倍に届かない

計算 3.1：大きい振幅（本稿で計算）。

振幅 [度]	T/T_0
90	1.180341
170	2.439363
175	2.877664
175.8765	3.000000
179	3.901065
179.9	5.366867

観察 3.2

170 度でも 2.4394 倍にしかならない。ほとんど真上まで持ち上げているのに——3 倍になるのは 175.8765 度である。

観察 3.3

T/T_0 は $\theta \rightarrow 180^\circ$ で対数的に発散する。179.9 度でも 5.3669 倍——発散は遅く、180 度の直前でしか効かない。

観察 3.4

つまり「大振幅では周期が発散する」は、実用の範囲では効いていない。0.1 度手前で 5.37 倍——定性的な言明が、量の見積もりを狂わせている。

観察 3.5

狂いの大きさは両端で違う原因をもつ。小さい側は θ^2 、大きい側は $\ln(1/(180^\circ - \theta))$ ——同じ曲線の二つの漸近形である。

観察 3.6

T/T_0 は振幅について単調増加である。1 度から 174 度まで一度も下がらない——谷も山も無い。

4. 小角近似がどこで壊れるか

観察 4.1

小角近似は $T/T_0 \approx 1 + \theta^2/16$ である。 θ はラジアン——10 度での誤差は 3.329×10^{-6} 。

観察 4.2

90 度では誤差が 2.613×10^{-2} になる。10 度の約 7800 倍——近似の破れ方も二乗より速い。

観察 4.3

10 度では近似が十分よい。誤差 3.3×10^{-6} は一日 0.29 秒——近似が悪いのではなく、真の値そのものが 164.78 秒ずれている。

観察 4.4

ここが混同されやすい。「近似が悪い」と「等時でない」は別——10 度で問題なのは後者である。

観察 4.5

論文300の基準で別根である。近似の誤差は数学が、等時性の破れは力学が決める——同じ「ずれ」という語に、根の違う二つが入っている。

5. 分離子：復元力が変位に比例するか、 $\sin$ に比例するか

観察 5.1

分離子——復元力が θ に比例するか、 $\sin \theta$ に比例するか。

系	復元力	等時性
調和振動子（ばね）	変位に比例	厳密に等時
単振り子	$\sin \theta$ に比例	等時でない
サイクロイド振り子	弧長に比例	全振幅で厳密に等時

観察 5.2

三行目が問題を解いている。ホイヘンスが 1673 年に示した——軌道をサイクロイドにすれば、振幅がいくら大きくても周期が変わらない。

観察 5.3

つまり等時性は、力の法則ではなく軌道の形の問題である。同じ重力の下で——円弧なら等時でなく、サイクロイドなら等時である。

観察 5.4

それでも実用の時計はサイクロイドを使わなかった。頬当ての摩擦が、等時性の利得より大きかった——正しい解が、実装で負けることがある。

観察 5.5

正直に言えば——**164.78 秒／日も 175.8765 度も**、減衰の無い保存系での値である。実際の振り子は振幅が減っていくので、狂いも時間とともに変わる——動かないのは、**10 度**が時計にとって「小さくない」ことと、**170 度**が**3 倍**に届かないことである。

観察 5.6

最後に一つ——「小さければ」という条件は、数を書かないかぎり条件になっていない。**10 度**は小さく見えて小さくない——どの精度で問うかを先に決めなければ、「小さい」は決まらない。

6. 点呼と結び

1. $T/T_0 = (2/\pi)K(\sin^2(\theta/2))$ (第1節)：楕円積分。
2. **1 度**で **1.64 秒／日** (計算 2.1)：ここでようやく実用。
3. **2 度**で **6.58 秒／日** (計算 2.1)：実用の振り子時計の領域。
4. **10 度**で **164.78 秒／日** (計算 2.1)：二分四十五秒。
5. **30 度**で **25.07 分／日** (観察 2.5)：時計にならない。
6. **90 度**で **4.33 時間／日** (観察 2.6)：周期比はまだ **1.18**。
7. **170 度**で **2.4394 倍** (計算 3.1)：**3 倍**に届かない。
8. **3 倍**は **175.8765 度** (計算 3.1)：発散は直前だけ。
9. 近似の誤差は **10 度**で 3.3×10^{-6} (観察 4.1)：近似は悪くない。
10. サイクロイドなら全振幅で等時 (観察 5.2)：軌道の形の問題。

結び：「振り子は振幅が小さければ等時である」と習う——だが「小さい」という語に、数が入っていない。厳密には $T/T_0 = (2/\pi)K(\sin^2(\theta/2))$ である——等時性は $\sin \theta \approx \theta$ の近似から出ており、方程式そのものは等時ではない。どこまでが「小さい」かを決めるのは、要求される精度である。**10 度**では、一日 **164.78 秒**ずれる——二分四十五秒であり、**10 度**は直感的には十分小さく見えて、時計としては使えない。**2 度**まで下げてようやく **6.58 秒／日**になり、実用の振り子時計が振幅を数度に抑えているのはこのためである。狂いは振幅の二乗で増え (1 度の **1.64 秒**から **2 度**の **6.58 秒**へほぼ四倍)、**30 度**では **1504.12 秒 = 25.07 分**、**90 度**では **4.33 時間**になる。ところが大振幅側では、発散が思ったほど効かない——**170 度**でも **2.4394 倍**にしかならず、**3 倍**になるのは **175.8765 度**である。 T/T_0 は **180 度**で対数的に発散するが、**179.9 度**でもまだ **5.3669 倍**で、発散は直前でしか効かない。「大振幅では周期が発散する」という定性的な言明が、量の見積もりを狂わせている。小さい側

は θ^2 、大きい側は $\ln(1/(180^\circ - \theta))$ という、同じ曲線の二つの漸近形である。小角近似が悪いわけではない—— $T/T_0 \approx 1 + \theta^2/16$ の 10 度での誤差は 3.329×10^{-6} 、一日 0.29 秒でしかない。90 度では 2.613×10^{-2} と約 7800 倍に開くが、10 度で問題なのは近似の誤差ではなく、真の値そのものが 164.78 秒ずれていることである。「近似が悪い」と「等時でない」は別で、論文300 の基準でも別根である——近似の誤差は数学が、等時性の破れは力学が決める。分けているものは一つ——復元力が変位に比例するか、 $\sin \theta$ に比例するか。ばねは厳密に等時、単振り子は等時でない。そしてサイクロイド振り子は全振幅で厳密に等時である（ホイヘンス 1673 年）。つまり等時性は力の法則ではなく軌道の形の問題で、同じ重力の下で円弧なら等時でなく、サイクロイドなら等時である。それでも実用の時計はサイクロイドを使わなかった——頬当ての摩擦が等時性の利得より大きかったからで、正しい解が実装で負けることがある。正直に言えば——164.78 秒／日も 175.8765 度も減衰の無い保存系での値であり、実際の振り子は振幅が減っていくので狂いも時間とともに変わる。動かないのは、10 度が時計にとって「小さくない」ことと、170 度が 3 倍に届かないことである。最後に一つ——「小さければ」という条件は、数を書かないかぎり条件になっていない。10 度は小さく見えて小さくない。どの精度で問うかを先に決めなければ、「小さい」は決まらない。

参考文献

1. Huygens, C. (1673). *Horologium Oscillatorium*. Paris: F. Muguet.
 2. Nelson, R. A., Olsson, M. G. (1986). The pendulum—Rich physics from a simple system. *American Journal of Physics*.
 3. Lima, F. M. S., Arun, P. (2006). An accurate formula for the period of a simple pendulum oscillating beyond the small angle regime. *American Journal of Physics*.
 4. Abramowitz, M., Stegun, I. A. (1964). *Handbook of Mathematical Functions*. Washington: National Bureau of Standards.
 5. 山岸勇輝 (2026). 『第三百回の点呼——同根か別根かは判定できる』 [論文300]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22171914
 6. 山岸勇輝 (2026). 『「二倍の温度」には三つの答があり、比が 2 になるのは一つだけである』 [論文379]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22698802
 7. 山岸勇輝 (2026). 『有義波高は、平均でもなければ最大でもない』 [論文391]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22699212
 8. 山岸勇輝 (2026). 『沸点は物質の性質ではない——物質と圧力の、対の性質である』 [論文392]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22699237
-

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)