

「粒を細かくすれば強くなる」が破れるのは、理論強度に達したからではない

— **10 nm** での予測値 **1550 MPa** は、理論強度 **11000 MPa** の **14.09** パーセントでしかない — 式が理論強度に達する粒径は **0.187652 nm** で、原子間距離 **0.256 nm** より小さい — 効いているのは粒界の体積分率 (**10 nm** で **30** パーセント) である — [論文397]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年9月

— *From thinking to syncing.* —

要旨

ホール・ペッチ則は粒径が小さいほど強度が上がると言い、**10~30 nm** で逆転する。本稿が示すのは逆転が理論強度に達したせいではないことである——そこでの予測値は理論強度の **14** パーセントにも届いていない。新しい定理も法則も主張しない。第一に、 $\sigma = \sigma_0 + k/\sqrt{d}$ は $d \rightarrow 0$ で発散する。式の側に上限が無い (第1節)。第二に、 $d = 10$ nm での予測値は **1550 MPa** である (第2節)。第三に、これが本稿の芯である。それは理論強度 $E/10 = 11000$ MPa の **14.09** パーセントでしかない (第2節)。第四に、式が理論強度に達する粒径は **0.187652 nm** で、銅の原子間距離 **0.256 nm** より小さい (第3節)。第五に、**10 nm** では粒界が体積の **30** パーセントを占める。**100 nm** では **3** パーセントである (第3節)。第六に、分離子は「変形が転位で担われるか、粒界すべりで担われるか」である (第5節)。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——ホール・ペッチ則、その逆転、粒界すべり、理論強度の見積もりはすべて材料科学で既知である。材料を設計しない——合金組成や加工法は与えない。一つの式の中の数だけを見る。逆転の機構を主張しない——粒界すべり・粒界回転・転位源の枯渇のどれが主かは論争があり、本稿は決めない。「理論強度ではない」ことだけを示す。定数を実測と主張しない—— $\sigma_0 = 50 \text{ MPa}$ 、 $k = 0.15 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ は銅を念頭に置いた代表値である。理論強度の定義を作らない—— $E/10$ は古典的な見積もりであり、より精密な値は結晶と面に依る。延性を扱わない——強度だけを見る。細粒化に伴う延性の低下は主題ではない。既刊との関係：論文386 は溶解度を動かさずに速さが動くことを示した——ここでは強度の式が動かないまま、別の量が効き始める。論文389 は厚さではなく長さが効くことを示した——ここでは理論強度ではなく体積分率が効く。論文385 は掴みの項が最大を作ることを示した——ここでは粒界の項が破れを作る。論文300 は同根か別根かが判定できることを示した——転位の強化と粒界の軟化は、その基準で別根である。加えたのは、六つの粒径で強度と体積分率を数に出したこと、**10 nm** で理論強度の **14.09** パーセントにとどまることを示したこと、式が理論強度に達する粒径が原子間距離より小さいことを示したこと、**10 nm** の粒が原子 **39** 個ぶんであることを示したこと、分離子を「転位か粒界すべりか」に置いたことである。

1. 記法と問い

設定：ホール・ペッチ則を書く。

$$\sigma = \sigma_0 + \frac{k}{\sqrt{d}}, \quad \sigma_0 = 50 \text{ MPa}, \quad k = 0.15 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$$

粒界の厚みを $\delta = 1 \text{ nm}$ とし、体積分率を $3\delta/d$ で見積もる。銅を念頭に $E = 110 \text{ GPa}$ 、理論強度を $E/10$ とする。

観察 1.1

式は $d \rightarrow 0$ で発散する。 $1/\sqrt{d}$ ——式の側に上限が無い。

観察 1.2

ところが実験では **10~30 nm** で逆転する。そこから先は細かくするほど弱くなる——式が破れる場所がある。

観察 1.3

もっともらしい説明は「理論強度に達したから」である。上限に頭を打つ——本稿はそれを数で確かめる。

問い：ホール・ペッチ則は、なぜ破れるのか。

2. 10 nm でも、理論強度の 14.09 パーセントである

計算 2.1：粒径に対する予測強度と粒界の体積分率（本稿で計算）。

粒径 d	予測強度 [MPa]	粒界の体積分率	理論強度に対する比
100 μm	65.0000	0.00003	0.0059
10 μm	97.4342	0.0003	0.0089
1 μm	200.0000	0.0030	0.0182
100 nm	524.3416	0.0300	0.0477
20 nm	1110.6602	0.1500	0.1010
10 nm	1550.0000	0.3000	0.1409

観察 2.2

これが本稿の芯である。逆転が観測される 10 nm で、右端はまだ 0.1409 である——理論強度の 14.09 パーセントで、七倍以上の余地を残したまま破れている。

観察 2.3

逆転域の上端 30 nm でも 10 パーセントを切る。20 nm で 0.1010——どこを取っても理論強度には遠い。

観察 2.4

一方、粒界の体積分率は 10 nm で 0.3000 に達する。三割が粒界——100 nm ではまだ 0.0300 で、一桁違う。

観察 2.5

つまり二つの量の育ち方が違う。強度は $1/\sqrt{d}$ 、体積分率は $1/d$ ——細かくするほど、体積分率のほうが速く効く。

観察 2.6

10 nm の粒は、一辺が原子 39 個ぶんである。銅の原子間距離 0.256 nm——連続体として扱うことが怪しくなる大きさである。

3. 式は、原子より小さい粒でしか理論強度に達しない

計算 3.1：式が理論強度 $E/10 = 11000 \text{ MPa}$ を出す粒径（本稿で計算）。

$$d = \left(\frac{k}{E/10 - \sigma_0} \right)^2 = 1.876525 \times 10^{-10} \text{ m} = 0.187652 \text{ nm}$$

量	値
式が理論強度に達する粒径	0.187652 nm
銅の原子間距離	0.256 nm
比	0.7330 （原子より小さい）

観察 3.2

式は、原子一個より小さい粒でしか理論強度に達しない。0.187652 nm 対 0.256 nm——つまり物理的に到達できない。

観察 3.3

だから「理論強度で頭打ちになる」という説明は成立しない。頭打ちの前に、粒が原子より小さくなる——上限に当たる機会が無い。

観察 3.4

もっともらしい説明が、桁で外れていた。実際の逆転は 10~30 nm——式が理論強度に達する 0.19 nm とは、53 倍から 160 倍離れている。

観察 3.5

論文389 と同じ形である。論文389 では厚さではなく長さが効いていた——ここでは理論強度ではなく体積分率が効いている。どちらも、名前の挙がっている量が効いていない。

観察 3.6

式には体積分率がそもそも入っていない。 σ_0 と $k/\sqrt{d}$ だけ——入っていない量が効き始めることが、破れの正体である。

4. 破れているのは、式ではなく前提である

観察 4.1

ホール・ペッチ則は転位の堆積を前提にしている。粒界が転位を止め、堆積が応力集中を生む——粒が小さくなるほど堆積できる転位が減る。

観察 4.2

10 nm の粒には、転位が数本しか入らない。一辺が原子 39 個——堆積という描像が成り立たなくなる。

観察 4.3

代わりに粒界そのものが変形を担い始める。粒界すべり・粒界回転——体積の三割が粒界なら、そちらが主役になる。

観察 4.4

つまり式が破れたのではなく、式的前提が消えた。式は正しいまま——適用できる領域から出ただけである。

観察 4.5

論文300の基準で別根である。転位の強化は結晶内部が、粒界の軟化は界面が決める——同じ「強度」に、根の違う二つが並んでいる。

5. 分離子：転位で担うか、粒界すべりで担うか

観察 5.1

分離子——変形の主役が結晶の内部にあるか、界面にあるか。

粒径	変形の主役	粒界の体積分率	細かくすると
> 100 nm	転位	3 パーセント以下	強くなる
< 10 nm	粒界すべり	30 パーセント以上	弱くなる

観察 5.2

右端の列が逆を向いている。同じ操作が、逆の結果を生む——どちらの領域にいるかで、対策が反転する。

観察 5.3

境目は体積分率で決まる。**3 パーセント**と**30 パーセント**——強度の絶対値ではない。

観察 5.4

分離子は動かせる。粒界の厚み δ が小さい材料なら、逆転はもっと細かい粒径で起きるはずである——これは検証できる予測である。

観察 5.5

正直に言えば—— $\sigma_0 = 50 \text{ MPa}$ も $k = 0.15$ も、銅を念頭に置いた代表値である。材料ごとに変わる——動かないのは、式が理論強度に達する粒径が原子間距離より小さいことと、体積分率が $1/d$ で育つことである。

観察 5.6

最後に一つ——「上限に頭を打ったから止まった」という説明は、上限が見えているときほど疑わしい。数を入れれば、上限までまだ七倍あった——止めたのは、式に入っていない量である。

6. 点呼と結び

1. $\sigma = \sigma_0 + k/\sqrt{d}$ は $d \rightarrow 0$ で発散（第1節）：式の側に上限が無い。
2. **10 nm** で **1550 MPa**（計算 2.1）：予測値。
3. 理論強度の **14.09 パーセント**（計算 2.1）：七倍以上の余地。
4. **20 nm** でも **10.10 パーセント**（計算 2.1）：どこを取っても遠い。
5. 粒界の体積分率は **10 nm** で **30 パーセント**（計算 2.1）：**100 nm** では **3 パーセント**。
6. 強度は $1/\sqrt{d}$ 、体積分率は $1/d$ （観察 2.5）：育ち方が違う。
7. **10 nm** の粒は原子 **39 個ぶん**（観察 2.6）：連続体が怪しい。
8. 式が理論強度に達するのは **0.187652 nm**（計算 3.1）：原子より小さい。
9. 実際の逆転とは**53 倍**から **160 倍**離れている（観察 3.4）：桁で外れている。

10. 式に体積分率が入っていない（観察 3.6）：入っていない量が効く。

結び：ホール・ペッチ則は粒径が小さいほど強度が上がると言い、10～30 nm で逆転する——だがその逆転は、理論強度に達したせいではない。式 $\sigma = \sigma_0 + k/\sqrt{d}$ は $d \rightarrow 0$ で発散し、式の側に上限が無い——もっともらしい説明は「理論強度に頭を打ったから」である。本稿はそれを数で確かめる。10 nm での予測値 1550 MPa は、理論強度 $E/10 = 11000$ MPa の 14.09 パーセントでしかない——七倍以上の余地を残したまま破れている。逆転域の 20 nm でも 10.10 パーセントで、どこを取っても理論強度には遠い。一方、粒界の体積分率は 10 nm で 0.3000 に達し、100 nm の 0.0300 とは一桁違う。強度は $1/\sqrt{d}$ 、体積分率は $1/d$ で育つので、細かくするほど後者のほうが速く効く。そして式は、原子より小さい粒でしか理論強度に達しない—— $d = (k/(E/10 - \sigma_0))^2 = 0.187652$ nm で、銅の原子間距離 0.256 nm より小さい。つまり物理的に到達できず、「理論強度で頭打ちになる」という説明は成立しない——頭打ちの前に、粒が原子より小さくなる。実際の逆転は 10～30 nm で、0.19 nm とは約 100 倍離れており、もっともらしい説明が桁で外れていた。論文389で厚さではなく長さが効いていたのと同じ形で、名前の挙がっている量が効いていない。破れているのは式ではなく、式的前提である——ホール・ペッチ則は転位の堆積を前提にしており、10 nm の粒（一辺が原子 39 個ぶん）には転位が数本しか入らず、堆積という描像が成り立たなくなる。代わりに体積の三割を占める粒界そのものが変形を担い始める。式は正しいまま、適用できる領域から出ただけである。論文300の基準で別根で、転位の強化は結晶内部が、粒界の軟化は界面が決める。そしてこの式には体積分率がそもそも入っておらず、入っていない量が効き始めることが破れの正体である。分けているものは一つ——変形の主役が結晶の内部にあるか、界面にあるか。100 nm より粗ければ転位が主役で細かくするほど強くなり、10 nm より細かければ粒界すべりが主役で細かくするほど弱くなる。境目を決めているのは体積分率（3 パーセントと 30 パーセント）であって、強度の絶対値ではない。粒界の厚みが小さい材料なら逆転はもっと細かい粒径で起きるはずで、これは検証できる予測である。正直に言えば—— $\sigma_0 = 50$ MPa も $k = 0.15$ も銅を念頭に置いた代表値であり、材料ごとに変わる。動かないのは、式が理論強度に達する粒径が原子間距離より小さいことと、体積分率が $1/d$ で育つことである。最後に一つ——「上限に頭を打ったから止まった」という説明は、上限が見えているときほど疑わしい。数を入れれば、上限までまだ七倍あった。止めたのは、式に入っていない量である。

参考文献

1. Hall, E. O. (1951). The Deformation and Ageing of Mild Steel: III Discussion of Results. *Proceedings of the Physical Society B*.
2. Petch, N. J. (1953). The Cleavage Strength of Polycrystals. *Journal of the Iron and Steel Institute*.
3. Schiøtz, J., Di Tolla, F. D., Jacobsen, K. W. (1998). Softening of nanocrystalline metals at very small grain sizes. *Nature*.
4. Meyers, M. A., Mishra, A., Benson, D. J. (2006). Mechanical properties of nanocrystalline materials. *Progress in Materials Science*.
5. 山岸勇輝 (2026). 『第三百回の点呼——同根か別根かは判定できる』[論文300]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22171914
6. 山岸勇輝 (2026). 『燃りは繊維を荷重方向から傾げるだけなのに、燃らない糸の強度はゼロである』[論文385]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22699091

7. 山岸勇輝 (2026). 『溶解度は一つも動いていないのに、溶ける速さが 1000 倍になる』 [論文386]. Zenodo.
10.5281/zenodo.22699119
8. 山岸勇輝 (2026). 『紙が折れなくなるのは厚いからではない——効いているのは長さである』 [論文389]. Zenodo.
10.5281/zenodo.22699183

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)