

数値の一致が同根の証拠になるのは、全単射があるときだけである

— 括弧列・二分木・三角形分割・格子路の四つが $n = 0$ から 8 まで完全に一致する（**1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430**） — だが中心二項係数も $n = 0$ では一致し、 $n = 1$ で分かれる — 一致する項の数は、証拠の強さではない — [論文405]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年9月

— *From thinking to syncing.* —

要旨

論文300 は「数値の一致だけでは同根と見なさない」と書いた。本稿が問うのはでは何があれば同根なのかである——答えは全単射であって、一致する項の数ではない。新しい定理も法則も主張しない。第一に、四つの数え上げが $n = 0$ から 8 まで完全に一致する（**1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430**）（第2節）。第二に、 $C(10) = 16796$ で、 $\binom{2n}{n}/(n+1)$ は $n = 0$ から 19 まで必ず割り切れる（第2節）。第三に、これが本稿の芯である。中心二項係数も $n = 0$ では一致し、 $n = 1$ で 2 対 1 と分かれる。一致する項の数は証拠の強さではない（第3節）。第四に、カタラン数の四つが同根なのは、全単射が構成できるからである（第4節）。第五に、漸近形 $4^n/(n^{3/2}\sqrt{\pi})$ は $n = 10$ で 11.38 パーセント外れ、 $n = 1000$ で 0.11 パーセントに縮む（第3節）。第六に、分離子は「有限個の一致か、対応の構成か」である（第5節）。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——カタラン数、四つの数え上げの一致、全単射証明、漸近形はすべて組合せ論で既知である。全単射を構成しない——具体的な対応（回転写像・深さ優先探索の符号化など）は既知であり、本稿は存在を用いるにとどめる。組合せ論を作らない——母関数や格子路の一般論には立ち入らない。四つの列を数え上げて比べるだけである。他の一致を扱わない——フィボナッチやベル数など他の列の一致は主題ではない。確率を扱わない——偶然の一致がどれくらい起こりやすいかは主題ではない。一致の数が証拠にならないことだけを言う。同根の定義を変えない——論文300の基準をそのまま使う。既刊との関係：論文300は同根か別根かが判定できることを示した——本稿はその基準の「同根」側に、具体例を一つ入れる。論文400は数値の一致が意味に見えることを示した——ここでは逆に、本当に同根である例を見る。論文388は二つの別の量が同じ定数へ行くことを示した——そちらは極限の一致で、同根ではなかった。論文398は同じ操作が位置で別の量になることを示した——ここでは別の操作が同じ量になる。加えたのは、四つの数え上げを $n = 0$ から 8 まで独立に実装して一致を確かめたこと、中心二項係数が $n = 0$ で一致し $n = 1$ で分かれることを示したこと、漸化式を独立な経路として確かめたこと、漸近形の誤差を $n = 10$ と $n = 1000$ で出したこと、分離子を「有限個の一致か、対応の構成か」に置いたことである。

1. 記法と問い

設定：カタラン数を $C_n = \binom{2n}{n}/(n+1)$ とし、次の四つを独立に数え上げる。(a) 長さ $2n$ の釣り合った括弧列の個数。(b) 節点 n 個の二分木の個数。(c) 凸 $(n+2)$ 角形の三角形分割の個数。(d) 対角線を越えない $n \times n$ 格子路の個数。

観察 1.1

四つは互いにまったく違う対象である。文字列・木・多角形・経路——同じ数になる理由が、定義からは見えない。

観察 1.2

論文300は「数値の一致だけでは同根と見なさない」と書いた。基準がある——ではこの四つは、その基準を満たすのか。

観察 1.3

一致する項の数を増やしても、証拠にはならない。有限個はいくらでも作れる——必要なのは、別の種類の証拠である。

問い：数値が一致するとき、同根と言ってよいのはいつか。

2. 四つが $n = 0$ から 8 まで完全に一致する

計算 2.1：四つを独立に数え上げた（本稿で計算）。

n	C_n	(a) 括弧列	(b) 二分木	(c) 三角形分割	(d) 格子路
0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2
3	5	5	5	5	5
4	14	14	14	14	14
5	42	42	42	42	42
6	132	132	132	132	132
7	429	429	429	429	429
8	1430	1430	1430	1430	1430

観察 2.2

九行すべてで四つが一致する。別々に実装した数え上げ—— $\binom{2n}{n}/(n+1)$ ——とも一致する。

観察 2.3

$C_{10} = 16796$ である。独立に知られた値——式も実装も外していない。

観察 2.4

$\binom{2n}{n}$ は $n+1$ で必ず割り切れる。 $n = 0$ から 19 まで確かめた——整数になること自体が、偶然ではない。

観察 2.5

漸化式 $C_{n+1} = \sum_i C_i C_{n-i}$ も $n = 0$ から 12 まで成り立つ。別経路の検算——閉じた式と漸化式が同じ数を返す。

観察 2.6

ここまでで、一致は九項+二つの独立な式である。十分に見える——それでも、これだけでは同根の証拠にならない。

3. 中心二項係数も、 $n = 0$ では一致する

計算 3.1：偽の一致の対照（本稿で計算）。

n	C_n	$\binom{2n}{n}$
0	1	1（一致）
1	1	2（分かれる）
2	2	6
3	5	20
10	16796	184756

観察 3.2

これが本稿の芯である。 $n = 0$ では一致し、 $n = 1$ で分かれる——一致する項が一つでも、二つでも、九つでも、それは同根の証拠ではない。数が違うだけである。

観察 3.3

$n = 10$ では 11 倍の差になる。16796 と 184756——最初の一項だけを見ていたら、同じ列に見える。

観察 3.4

漸近形もまた、一致に見えて一致しない。 $4^n/(n^{3/2}\sqrt{\pi})$ —— $n = 10$ で 11.38 パーセント、 $n = 100$ で 1.13 パーセント、 $n = 1000$ で 0.11 パーセント外れる。

観察 3.5

誤差は n とともに縮むが、決してゼロにならない。比が 1 に近づくだけ——近づくことと等しいことは違う。

観察 3.6

論文388 と同じ形である。論文388 では二つの別の量が同じ $1/e$ へ行った——極限が同じでも同根ではない。ここでも、近づくことは証拠にならない。

4. 同根であることの証拠は、対応そのものである

観察 4.1

四つが同根である理由は、全単射が構成できることである。括弧列と二分木のあいだ、括弧列と格子路のあいだ、など——一つ一つの対象を、一つ一つの対象に写す規則がある。

観察 4.2

全単射は、数の一致より強い。個数が等しいことを含み、さらに「どれがどれに対応するか」を言う——数の一致は、そこから出てくる系である。

観察 4.3

だから全単射があれば、すべての n で一致する。有限個の確認ではない——確認の数を増やす必要がなくなる。

観察 4.4

中心二項係数には、そのような対応が無い。 $n = 0$ の一致は、たまたま両方 1 だっただけ——対応を作ろうとすると、 $n = 1$ で作れない。

観察 4.5

論文300 の基準は、まさにここを言っている。数値の一致だけでは同根と見なさない——本稿は、その基準を満たす例と満たさない例を、同じ表の上に並べた。

観察 4.6

この基準は、物理でも同じ形をしている。同じ式が出るだけでは同根ではなく、同じ変数が同じ役をしていることが要る——体系が繰り返し使ってきた分離子である。

5. 分離子：有限個の一致か、対応の構成か

観察 5.1

分離子——一致が有限個の値についてか、対象と対象の対応がついているか。

関係	一致する範囲	全単射	同根か
括弧列と二分木	すべての n	ある	同根
C_n と $\binom{2n}{n}$	$n = 0$ のみ	無い	別根
C_n と 漸近形	どこも一致しない	無い	別根

観察 5.2

三行目は一項も一致しないのに、一番よく似ている。 $n = 1000$ で 0.11 パーセント——似ていることと同根であることは、まったく別である。

観察 5.3

二行目は一項一致するのに、まったく別物である。 $n = 1$ で分かれる——一致の数を数えても順序が付かない。

観察 5.4

判定は三列目だけで付く。全単射があるか——数を見る必要が無い。

観察 5.5

正直に言えば——本稿は全単射を構成していない。既知の対応の存在を用いただけである。構成は組合せ論の教科書にある——動かないのは、 $n = 0$ での一致が証拠にならないことと、 $n = 1$ で分かれることである。

観察 5.6

最後に一つ——「九項一致した」は、証拠の量ではあっても、種類ではない。十項でも百項でも種類は変わらない——種類を変えるのは、対応の一つ書くことである。

6. 点呼と結び

1. 四つが $n = 0 \sim 8$ で一致（計算 2.1）：1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430。
2. $C_{10} = 16796$ （観察 2.3）：独立に知られた値。
3. $\binom{2n}{n}$ は $n + 1$ で割り切れる（観察 2.4）： $n = 0 \sim 19$ で確認。
4. 漸化式も一致（観察 2.5）：別経路の検算。
5. $\binom{2n}{n}$ も $n = 0$ で一致（計算 3.1）： $n = 1$ で 2 対 1。
6. $n = 10$ で 11 倍（観察 3.3）：最初だけ見れば同じに見える。
7. 漸近形は $11.38 \rightarrow 1.13 \rightarrow 0.11$ パーセント（観察 3.4）：近づくがゼロにならない。
8. 全単射は数の一致より強い（観察 4.2）：どれがどれに対応するかを言う。
9. 一項一致と全項一致は種類が違う（観察 5.3）：数えても順序が付かない。

10. 種類を変えるのは対応を一つ書くこと（観察 5.6）：量ではない。

結び：論文300は「数値の一致だけでは同根と見なさない」と書いた——では、何があれば同根なのか。カタラン数では、四つのまったく違う対象の数え上げが一致する——括弧列・二分木・三角形分割・格子路を別々に実装して数えると、 $n=0$ から8まで九行すべてで1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430と一致し、 $\binom{2n}{n}/(n+1)$ とも一致する。 $C_{10} = 16796$ は独立に知られた値と合い、 $\binom{2n}{n}$ は $n=0$ から19まで必ず $n+1$ で割り切れ、漸化式 $C_{n+1} = \sum_i C_i C_{n-i}$ も $n=0$ から12まで成り立つ。九項の一致と二つの独立な式——十分に見える。それでも、これだけでは同根の証拠にならない——中心二項係数 $\binom{2n}{n}$ も $n=0$ では1で一致し、 $n=1$ で2対1と分かれる。 $n=10$ では184756対16796で11倍の差になるが、最初の一項だけを見ていたら同じ列に見える。一致する項が一つでも九つでも、それは同根の証拠ではない。漸近形 $4^n/(n^{3/2}\sqrt{\pi})$ はさらに紛らわしく、一項も一致しないのに $n=10$ で11.38パーセント、 $n=100$ で1.13パーセント、 $n=1000$ で0.11パーセントまで近づく——論文388で二つの別の量が同じ $1/e$ へ行ったのと同じで、近づくことは証拠にならない。四つが同根である理由は、全単射が構成できることである——括弧列と二分木、括弧列と格子路のあいだに、一つ一つの対象を一つ一つの対象に写す規則がある。全単射は数の一致より強く、個数が等しいことを含んだうえで「どれがどれに対応するか」を言う。数の一致はそこから出てくる系である。だから全単射があればすべての n で一致し、確認の数を増やす必要が無くなる。中心二項係数にはそのような対応が無く、 $n=0$ の一致はたまたま両方1だっただけで、対応を作ろうとすると $n=1$ で作れない。分けているものは一つ——一致が有限個の値についてか、対象と対象の対応がついているか。三行目（漸近形）是一项も一致しないのに一番よく似ており、二行目（中心二項係数）是一项一致するのにまったく別物である——似ていることと同根であることは、まったく別である。判定は「全単射があるか」だけで付き、数を見る必要が無い。論文300の基準は、まさにここを言っている。本稿はその基準を満たす例と満たさない例を、同じ表の上に並べた。正直に言えば——本稿は全単射を構成していない。既知の対応の存在を用いただけであり、構成は組合せ論の教科書にある。動かないのは、 $n=0$ での一致が証拠にならないことと、 $n=1$ で分かれることである。最後に一つ——「九項一致した」は、証拠の量ではあっても、種類ではない。十項でも百項でも種類は変わらない。種類を変えるのは、対応を一つ書くことである。

参考文献

1. Stanley, R. P. (2015). *Catalan Numbers*. Cambridge: Cambridge University Press.
2. Segner, J. A. (1758). Enumeratio modorum quibus figurae planae rectilineae per diagonales dividuntur in triangula. *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*.
3. Catalan, E. (1838). Note sur une équation aux différences finies. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*.
4. Graham, R. L., Knuth, D. E., Patashnik, O. (1994). *Concrete Mathematics* (2nd ed.). Reading: Addison-Wesley.
5. 山岸勇輝 (2026). 『第三百回の点呼——同根か別根かは判定できる』[論文300]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22171914
6. 山岸勇輝 (2026). 『候補が百万人でも、最良を当てる確率は0.3679のまま落ちない』[論文388]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22699147

7. 山岸勇輝 (2026). 『同じ一文字の誤りが、位置によって 15.75 倍違う——第 2 位はちょうど 0 である』 [論文398]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22699326
8. 山岸勇輝 (2026). 『四百本目の点呼——数えられたものより、数えた道具のほうが先に壊れた』 [論文400]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22699343

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)