

柱を一本足すと、閉じた式が消える

— 三本柱のハノイの塔は $2^n - 1$ で終わるが、四本柱では分割点を探す最適化が要る — $n = 64$ で
18,446,744,073,709,551,615 手が **18,433** 手になる — 易しくなることと、式が書けることは別である
— [論文413]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

ハノイの塔は、柱が三本なら $2^n - 1$ 手で終わる。柱を一本足すと、手数は劇的に減る。本稿が示すのは、減るのに式が書けなくなることである——易しくなることと、閉じた式があることは別の話である。新しい定理も法則も主張しない。第一に、三本柱の $n = 64$ は 18,446,744,073,709,551,615 手であり、これは $2^{64} - 1$ にちょうど一致する（第2節）。第二に、一秒に一手なら 5.8454×10^{11} 年、宇宙の年齢の **42.3581** 倍かかる（第2節）。第三に、これが本稿の芯である。柱を一本足すと $n = 64$ が **18,433** 手になる。 1.0007×10^{15} 倍の短縮だが、その **18,433** を n の式で書く方法が三本柱と同じ形では出てこない（第3節）。第四に、短縮の効きは n で大きく変わる。 $n = 5$ で 2.38 倍、 $n = 20$ で 3628.29 倍、 $n = 30$ で 1,047,553 倍である（第3節）。第五に、三本柱の $2^n - 1$ は漸化式 $T(n) = 2T(n-1) + 1$ と $n = 2$ から 29 まで完全に一致する（第2節）。第六に、分離子は「一手で何が決まるか」である。三本では次の一手が一意で、四本では分割点を選ばなければならない（第4節）。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——三本柱の $2^n - 1$ 、フレーム＝スチュワートの漸化式はどちらも既知である（1883 年、1941 年）。最小性を論じない——四本柱の値が最小手数と一致するかどうかは、本稿の主題ではなく、本稿は何も決着させない。本稿が扱うのは「閉じた式が書けるか」だけである。五本以上を扱わない——三本と四本の対比だけを見る。アルゴリズムを設計しない——実装や探索法は主題ではない。計算量の理論を展開しない—— P と NP の話ではない。伝説を史実として扱わない——ブラフマーの塔の逸話は 1883 年のリュカによる創作であり、宇宙の年齢との比較は分かりやすさのためである。既刊との関係：論文411 は何も保たない変換にも保存量があることを示した——そこでは形が壊れても量が残った。ここでは量が減っても式が残らない。論文300 は同根か別根かが判定できることを示した——「解くのが易しい」と「式が書ける」は、その基準で別根である。論文412 は「一番近い」が距離を決めるまで決まらないことを示した——ここでは「最小手数」が柱の本数を決めるまで形を持たない。加えたのは、五つの n で三本と四本を並べて数に出したこと、 $n = 64$ の 1.0007×10^{15} 倍という短縮率を出したこと、 $2^n - 1$ を漸化式と 28 個の n で突き合わせたこと、宇宙の年齢との比を 42.3581 倍と出したこと、分離子を「次の一手が一意か」に置いたことである。

1. 記法と問い

設定： n 枚の円盤を、大きい円盤を小さい円盤の上に置かないという規則のもとで移す。柱が三本するとき、最小手数は次の漸化式で決まる。

$$T_3(n) = 2T_3(n-1) + 1, \quad T_3(1) = 1$$

柱が四本ときは、上の k 枚をいったん退避してから残りを三本柱で移す。

$$T_4(n) = \min_{1 \leq k < n} (2T_4(k) + 2^{n-k} - 1)$$

観察 1.1

三本の式は閉じている。 $T_3(n) = 2^n - 1$ —— n を入れれば答が出る。

観察 1.2

四本の式には **min** が入っている。どこで分けるかを探さなければならない—— n を入れただけでは答が出ない。

問い：柱を足すと問題は易しくなる。それなのに式はなぜ難しくなるのか。

2. 三本柱：閉じた式がある

計算 2.1： $T_3(64) = 2^{64} - 1$ を厳密に計算する。

$T_3(64) = 18,446,744,073,709,551,615$ である。

観察 2.2

漸化式と閉じた式が一致することを確認する。 $T(n) = 2T(n - 1) + 1$ を回した値と $2^n - 1$ が、 $n = 2$ から 29 まで全部一致する——閉じた式が正しいことの確認である。

計算 2.3：一秒に一手なら何年かかるか。

5.8454×10^{11} 年である。宇宙の年齢 1.38×10^{10} 年の 42.3581 倍にあたる。

観察 2.4

この数の大きさは、閉じた式のおかげで一瞬で出る。 $2^{64} - 1$ を計算するだけである——手順を辿る必要はない。

3. 四本柱：数は減り、式は消える

計算 3.1：同じ n で三本と四本を並べる。

円盤 n	三本柱 $2^n - 1$	四本柱	比
5	31	13	2.38
10	1,023	49	20.88
20	1,048,575	289	3,628.29
30	1,073,741,823	1,025	1,047,553.00
64	18,446,744,073,709,551,615	18,433	1.0007×10^{15}

観察 3.2

短縮は劇的である。 $n = 64$ で 1.0007×10^{15} 倍——宇宙の年齢の 42 倍かかっていたものが、一秒一手でも五時間ほどになる。

観察 3.3

短縮の効きは n で大きく変わる。 $n = 5$ ではまだ 2.38 倍しかない—— $n = 20$ で 3,628.29 倍、 $n = 30$ で 1,047,553 倍になる。差が指数的に開くからである。

観察 3.4

ところが 18,433 という数は、 n の式から直接は出てこない。 $\min$ をとる k を、 n ごとに探さなければならない——三本柱の $2^n - 1$ のように、 n を代入して終わりににはならない。

観察 3.5

つまり「易しくなる」と「式で書ける」が逆を向いた。手数は 10^{15} 分の一になった——そのぶん、答を得る手続きは長くなった。

4. 分離子

分離子：次の一手が一意に決まるか、選ばなければならないか。

観察 4.1

三本では選択肢が無い。上の $n - 1$ 枚を空いている柱へ移す以外に道がない——道が一本なので、漸化式が一本の式になる。

観察 4.2

四本では退避する枚数 k を選べる。 $1 \leq k < n$ のどれでもよい——選べるから最短になり、選べるから式にならない。

観察 4.3

これは論文300の基準で別根である。「解くのが易しい」は手数で測る——「式で書ける」は手続きの形で測る。同じ問題の違う軸である。

観察 4.4

自由度が増えると最適化が現れる、というのは他でも起きる。道が一本なら計算は要らない——道が増えた瞬間に「どれが最良か」という別の問題が生まれる。

観察 4.5

正直に言えば——本稿は「四本柱に閉じた式が存在しない」とは言っていない。言っているのは、三本柱で通る初等的な議論が四本柱ではそのまま通らず、上の式には **min** が残る、ということだけである——最小性の証明も、閉じた式の非存在も、本稿は扱わない。

観察 4.6

最後に一つ—— $2^{64} - 1$ という数は将棋盤の米粒と同じ形である。どちらも「一手ごとに倍」から出る——柱を足すという操作は、その「倍」を分割して二乗根の側へ押しやる。

5. 点呼と結び

1. $T_3(64) = 18,446,744,073,709,551,615$ (計算 2.1) : $2^{64} - 1$ 。
2. 漸化式と閉じた式が $n = 2 \sim 29$ で一致 (観察 2.2) : 閉じた式の確認。
3. 一秒一手で 5.8454×10^{11} 年 (計算 2.3) : 現実的でない。
4. 宇宙の年齢の 42.3581 倍 (計算 2.3) : 比で見ても大きい。

5. $n = 64$ の四本柱は **18,433** 手（計算 3.1）：五時間ほど。
6. 短縮は 1.0007×10^{15} 倍（観察 3.2）：劇的である。
7. $n = 5$ では **2.38** 倍（計算 3.1）：小さい n では効かない。
8. $n = 30$ では **1,047,553** 倍（計算 3.1）：指数的に開く。
9. 四本の式には **min** が残る（観察 3.4）：代入で終わらない。
10. 分離子は一意か選択か（観察 4.2）：選べるから式にならない。

結び：ハノイの塔は柱が三本なら閉じた式で終わる—— $T_3(n) = 2^n - 1$ であり、 $n = 64$ なら

18,446,744,073,709,551,615 手になる。漸化式 $T(n) = 2T(n-1) + 1$ を回した値と $n = 2$ から **29** まで完全に一致するので、閉じた式であることは確かである。一秒に一手なら 5.8454×10^{11} 年、宇宙の年齢の **42.3581** 倍かかるが、その大きさは手順を辿らずに一瞬で分かる。閉じた式とはそういうものである。柱を一本足すと、手数は劇的に減る—— $n = 64$ が **18,433** 手、 1.0007×10^{15} 倍の短縮になり、一秒一手でも五時間ほどで終わる。効き方は n で大きく変わり、 $n = 5$ ではまだ **2.38** 倍、 $n = 20$ で **3,628.29** 倍、 $n = 30$ で **1,047,553** 倍と、差は指数的に開く。ところが、その **18,433** を n の式で書こうとすると手が止まる——四本柱の漸化式には $\min_{1 \leq k < n}$ が入っており、どこで分けるかを n ごとに探さなければならない。三本柱のように n を代入して終わりににはならない。つまり「易しくなる」と「式で書ける」が逆を向いた——手数は 10^{15} 分の一になり、そのぶん答を得る手続きは長くなった。分けているものは一つ——次の一手が一意に決まるか、選ばなければならないか。三本では上の $n-1$ 枚を空いた柱へ移す以外に道がなく、道が一本だから漸化式も一本の式になる。四本では退避する枚数 k を $1 \leq k < n$ から選べる——選べるから最短になり、選べるから式にならない。論文300の基準で別根であり、「解くのが易しい」は手数で測り、「式で書ける」は手続きの形で測る。正直に言えば——本稿は「四本柱に閉じた式が存在しない」とは言っていない。言っているのは、三本柱で通る初等的な議論が四本柱ではそのまま通らず、式に **min** が残るということだけである。最小性の証明も、閉じた式の非存在も、本稿は扱わない。最後に一つ—— $2^{64} - 1$ は将棋盤の米粒と同じ形の数であり、どちらも「一手ごとに倍」から出る。柱を足すという操作は、その「倍」を分割して押し下げる。

参考文献

-
1. Lucas, É. (1883). *La Tour d'Hanoi, véritable casse-tête annamite*. Paris: Jeu rapporté du Tonkin.
 2. Frame, J. S. (1941). Solution to Advanced Problem 3918. *American Mathematical Monthly*.
 3. Stewart, B. M. (1941). Solution to Advanced Problem 3918. *American Mathematical Monthly*.
 4. Hinz, A. M., Klavžar, S., Milutinović, U., & Petr, C. (2013). *The Tower of Hanoi — Myths and Maths*. Basel: Birkhäuser.
 5. 山岸勇輝 (2026). 『三百本目の点呼 —— 同根か別根かは、判定できる』[論文300]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22171914
 6. 山岸勇輝 (2026). 『何も保たない変換にも、保たれる量がある』[論文411]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22699656
 7. 山岸勇輝 (2026). 『「一番近い」は、距離を決めるまで決まらない』[論文412]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22699661

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)