

どの順位でも一定なのに、合計は決まらない

— 順位 × 頻度は 1 位でも 10000 位でもちょうど **1.000000** である — それでも総和は **9.787606** で、
 N とともに増え続ける — 指数を **0.8** から **1.2** へ動かすと、上位 1 パーセントの占有率が **2.5022** 倍変
わる — [論文435]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年9月

— *From thinking to syncing.* —

要旨

「順位と頻度の積が一定である」という言い方がある。本稿が示すのは、その「一定」が全体を決めないことである——どの順位でも一定なのに、合計は N とともに増え続ける。新しい定理も法則も主張しない。第一に、指数 1 のとき、順位 × 頻度は 1 位でも 10000 位でもちょうど **1.000000** である（第2節）。第二に、これが本稿の芯である。どの順位でも一定なのに、総和は **9.787606** で頭打ちしない。 N を増やせば増え続ける（第2節）。第三に、その総和は $\ln N + \gamma = \mathbf{9.787556}$ と差 **0.000050** で一致する（第2節）。第四に、指数 1.0 では上位 1 パーセントが全体の **52.9995** パーセントを占める（第3節）。第五に、指数を **0.8** から **1.2** へ動かすと、その占有率は **0.300046** から **0.750766** へ **2.5022** 倍変わる（第3節）。第六に、分離子は「一つの順位を見るか、全体を見るか」である（第4節）。キーワード：ジップの法則、冪則、調和級数、順位と頻度、裾の重い分布。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——ジップの法則、調和級数の発散、冪則の裾はすべて既知である。実データを当てない——どの分野で指数がいくつかという調査は主題ではない。指数は与えられた数として扱う。機構を説明しない——なぜ冪則が現れるのかという議論（優先的選択、最適化、最大エントロピー）は主題ではない。当てはめの手法を論じない——推定量の選び方、裾の切り方、検定は主題ではない。有限の系を無限として扱わない——実際の集合は有限なので総和は必ず有限である。本稿が言うのは「 N を増やすと増え続ける」ことであって、無限になるとは言わない。離散と連続を混ぜない——順位は整数であり、積分による近似は $\ln N + \gamma$ の照合にだけ使う。既刊との関係：論文434 は安くしているのが時間でなく累積であることを示した——そこでも冪則が主役だった。ここでは冪の値そのものが全体像を決める。論文300 は同根か別根かが判定できることを示した——「各項が一定」と「合計が決まる」は、その基準で別根である。論文417 は段数の上限が生き物の都合でないことを示した——ここでは等比数列で合計が収束した。ここでは収束しない。論文424 は割ると分母の動きが分子の出来事になることを示した——ここでも、占有率という割合が二つの和の商である。加えたのは、五つの順位で積が一定であることを数に出したこと、総和を $\ln N + \gamma$ と照合したこと、 N を増やすと総和が増えることを確かめたこと、三つの指数で上位 1 パーセントの占有率を出したこと、占有率の比を 2.5022 倍と出したこと、分離子を「一つの順位か、全体か」に置いたことである。

1. 記法と問い

設定：順位 k の要素の頻度を次で書く。

$$f(k) \propto \frac{1}{k^\alpha}$$

$\alpha = 1$ のとき、順位と頻度の積 $kf(k)$ は k に依らず一定になる。以下 $N = 10000$ とし、比例定数を 1 に取る。

観察 1.1

「順位 × 頻度が一定」は、強い規則性に聞こえる。どの順位を見ても同じ数が出る——全体が把握できたように感じる。

観察 1.2

だが「一定」は各項についての言明である。一つの k を選んだときの値の話——全部を足したときの値については、何も言っていない。

問い：各項が一定なら、合計は決まるのか。

2. どの順位でも一定で、合計は増え続ける

計算 2.1： $\alpha = 1$ として、五つの順位で頻度と積を出す。

順位	頻度	順位 × 頻度
1	1.00000000	1.000000
10	0.10000000	1.000000
100	0.01000000	1.000000
1000	0.00100000	1.000000
10000	0.00010000	1.000000

観察 2.2

四桁にわたって、まったく同じ値である。ばらつきがゼロ——定義どおりであり、実装が正しいことを示す。

計算 2.3：全部の順位で足す。

総和は **9.787606** である。

観察 2.4

この値は $\ln N + \gamma$ と一致する。 $\ln 10000 + 0.5772156649 = \mathbf{9.787556}$ 、差は **0.000050**——独立な既知の近似との突合せである。

観察 2.5

N を 100000 にすると総和はさらに増える。頭打ちが無い——各項が一定でも、合計は決まらない。

観察 2.6

増え方は対数である。 N を 10 倍にして総和は $\ln 10 = 2.30$ 増えるだけ——だから「発散する」と「速く増える」も別の話である。

3. 指数を動かすと、全体像が変わる

計算 3.1：指数 α を変えて、上位 1 パーセントが占める割合を出す。

指数 α	上位 1 % の占有率
0.8	0.300046
1.0	0.529995
1.2	0.750766

観察 3.2

指数 1.0 で、上位 1 パーセントが半分を超える。**52.9995** パーセント——百分の一が半分を持っている。

観察 3.3

指数を 0.8 から 1.2 へ動かすと、占有率は **2.5022** 倍変わる。0.30 から 0.75 へ——指数の 0.4 の差が、全体像を作り替える。

観察 3.4

どの場合も「冪則である」ことに変わりはない。形は同じで、指数だけが違う——だから「冪則が見つかった」だけでは、何も言ったことにならない。

観察 3.5

指数 1 は特別な位置にいる。 $\alpha > 1$ なら総和は収束し、 $\alpha \leq 1$ なら発散する——ちょうど境目に立っている。

4. 分離子

分離子：一つの順位を見るか、全体を見るか。

観察 4.1

一つの順位を見れば、積は一定である。 k を選んで $kf(k)$ を計算する——何を選んでも同じ数が出る。

観察 4.2

全体を見れば、合計は N に依る。どこまで数えたかで変わる——同じ規則から、二つの違う性格の量が出る。

観察 4.3

これは論文300 の基準で別根である。どちらも「一定」という語で語られる——一方は各項の性質、一方は和の性質である。

観察 4.4

だから「順位 $\times$ 頻度が一定だから安定している」とは言えない。各項は安定していても、合計は数え方で動く——どこで切るかを決めなければ、総量が決まらない。

観察 4.5

占有率も同じである。上位 1 パーセントの占有率は、指数と N の両方に依る——一つの数で「集中している」と言うには、二つを併記する必要がある。

観察 4.6

正直に言えば——実際の集合は有限なので、総和は必ず有限である。本稿が言うのは「 N を増やすと増え続ける」ことである——無限になるとは言っていない。

観察 4.7

最後に一つ——増え方が対数であることも大事である。 N を10倍にして2.30しか増えない——「発散する」は「大きい」ではない。二つを混ぜると、どちらも誤解になる。

5. 点呼と結び

1. 順位 × 頻度は四桁で **1.000000** (計算 2.1) : ばらつきゼロ。
2. 総和は **9.787606** (計算 2.3) : 各項一定でも決まらない。
3. $\ln N + \gamma = \mathbf{9.787556}$ (観察 2.4) : 差 **0.000050**。
4. N を増やすと増え続ける (観察 2.5) : 頭打ちが無い。
5. 増え方は対数 (観察 2.6) : 10倍で **2.30**。
6. 指数 1.0 で上位 1 % が **52.9995 %** (計算 3.1) : 半分超。
7. 指数 0.8 では **30.0046 %** (計算 3.1) : 薄い。
8. 指数 1.2 では **75.0766 %** (計算 3.1) : 濃い。
9. 占有率の比は **2.5022** 倍 (観察 3.3) : 指数 0.4 の差で。
10. 分離子は各項か全体か (観察 4.3) : 論文300 の基準で別根。

結び : 「順位 × 頻度が一定である」は、強い規則性に聞こえる——どの順位を見ても同じ数が出るので、全体が把握できたように感じる。だが「一定」は各項についての言明であって、全部を足したときの値については何も言っていない。実際、各項は一定で、合計は決まらない——指数 1 のとき順位 × 頻度は 1 位でも 10000 位でもちょうど **1.000000** で、四桁にわたってばらつきがゼロである。それでも総和は **9.787606** で、 $\ln N + \gamma = \mathbf{9.787556}$ と差 **0.000050** で一致し、 N を増やせば増え続けて頭打ちが無い。ただし増え方は対数で、 N を10倍にして総和は 2.30 増えるだけである——「発散する」と「速く増える」も別の話である。そして指数を少し動かすと、全体像が作り替わる——上位 1 パーセントの占有率は、指数 0.8 で **0.300046**、1.0 で **0.529995**、1.2 で **0.750766** になる。指数 1.0 では百分の一が半分を超える量を持ち、0.8 から 1.2 への 0.4 の差が占有率を **2.5022** 倍動かす。どの場合も「冪則である」ことに変わりはないので、「冪則が見つかった」だけでは何も言ったことにならない。指数 1 は特別な位置にいて、 $\alpha > 1$ なら総和は収束し、 $\alpha \leq 1$ なら発散する

——ちょうど境目に立っている。分けているものは一つ——一つの順位を見るか、全体を見るか。一つの順位を見れば積は一定で、何を選んでも同じ数が出る。全体を見れば合計は N に依り、どこまで数えたかで変わる。論文300の基準で別根であり、どちらも「一定」という語で語られるが、一方は各項の性質、一方は和の性質である。だから「順位 × 頻度が一定だから安定している」とは言えない——各項は安定していても、どこで切るかを決めなければ総量が決まらない。占有率も同じで、指数と N の両方に依るので、一つの数で「集中している」と言うには二つを併記する必要がある。正直に言えば——実際の集合は有限なので総和は必ず有限である。本稿が言うのは「 N を増やすと増え続ける」ことであって、無限になるとは言っていない。最後に一つ——増え方が対数であることも大事である。 N を10倍にして2.30しか増えないので、「発散する」は「大きい」ではない。二つを混ぜると、どちらも誤解になる。

参考文献

1. Zipf, G. K. (1949). *Human Behavior and the Principle of Least Effort*. Cambridge, MA: Addison-Wesley.
 2. Newman, M. E. J. (2005). Power Laws, Pareto Distributions and Zipf's Law. *Contemporary Physics*.
 3. Clauset, A., Shalizi, C. R., & Newman, M. E. J. (2009). Power-Law Distributions in Empirical Data. *SIAM Review*.
 4. Simon, H. A. (1955). On a Class of Skew Distribution Functions. *Biometrika*.
 5. 山岸勇輝 (2026). 『三百本目の点呼 —— 同根か別根かは、判定できる』 [論文300]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22171914
 6. 山岸勇輝 (2026). 『食物連鎖の段数に上限があるのは、生き物の都合ではない』 [論文417]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22699882
 7. 山岸勇輝 (2026). 『割ると、分母の動きが分子の出来事になる』 [論文424]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22700141
 8. 山岸勇輝 (2026). 『安くしているのは、時間ではなく累積である』 [論文434]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22708735
-

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)