

16 π^2 のうち、幾何なのは $\Omega_3=2\pi^2$ だけである

— (2 π)⁴ はフーリエの規約であり、4 πv の 4 π は立体角ではない — [論文46] 第3版

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月 (第3版)

— From thinking to syncing. —

要旨

本稿は、1ループ補正の $\frac{1}{16\pi^2}$ と2ループの $\frac{1}{(16\pi^2)^2}$ が4次元運動量空間のループ測度であることを導出し、 L ループ振幅が $(16\pi^2)^{-L}$ を伴うという一般則を立てた。定理2.1 は正しく、第3版でも変更しない——

$\int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} F = \frac{1}{16\pi^2} \int dk^2 k^2 F$ (本稿で再確認)。第3版が訂正するのは、その $16\pi^2$ を「純粋な幾何学的帰結」と呼んだ点である。第一に、 $16\pi^2$ を分解すると三つの身分の違う因子が出る。

$$16\pi^2 = \underbrace{2}_{\text{ヤコビアン}} \times \underbrace{(2\pi)^4}_{\text{フーリエの規約}} / \underbrace{\Omega_3 = 2\pi^2}_{\text{幾何}}$$

(本稿で記号計算により確認)。 Ω_3 は単位3球面の表面積であり、これだけが幾何である。(2 π)⁴ はフーリエ変換の 2 π をどこに置くかという規約から来ており、2 は $k^3 dk = \frac{1}{2} u du$ という変数変換のヤコビアンである。第二に、規約であることの証拠は、規約を変えると数が変わることである。 $\int d^4 k / (2\pi)^4$ を $\int d^4 k / (2\pi)^2$ に変えると同じ組み合わせは 4 に、 $\int d^4 k$ なら $1/\pi^2$ になる (本稿で確認)。物理的振幅は変わらないが、 $16\pi^2$ という数には変わる。よって「力学的仮定を一切含まない」は正しいが、「純粋な幾何学的帰結」は正しくない——力学を含まないことと、幾何であることは別である (論文95)。第三に、系2.2 の同型性は数値の一致であり、両辺の組成は完全に異なる。左辺 $2(2\pi)^4/\Omega_3$ は規約×幾何×ヤコビアン、右辺 $(4\pi) \times (4\pi)$ は規約×規約 (パッチ定数は任意の $a > 0$ でよい・論文116)。第2版の注記2.3 が「同型性は解釈である」と限定したのは正しい。第3版はその理由を書く——一方がフーリエの規約に汚染されているからである。第四に、 $\Lambda \lesssim 4\pi v$ の 4 π は立体角ではない。それは $\sqrt{16\pi^2}$ すなわちループ因子の平方根であり、上で見たとおり幾何ではない。数値は正しい——
 $4\pi v = 3091 \text{ GeV} = 3.09 \text{ TeV}$ 、トップ湯川の $\sqrt{6}$ を入れて $1262 \text{ GeV} = 1.26 \text{ TeV}$ (本稿で確認)。訂正するのは「立体角の形で表される上限」という呼び方だけである (論文45 が面積を立体角と呼んでいたのと同型)。第2版が撤回したカットオフ循環論法は、正しく撤回されており、本版でも復活しない。LHC との観測的緊張の明記、209/2880 に解釈を与えない規律も、そのまま保つ。射程：確立された標準的事実の構造的解釈と自己点検 (第2層)。量子重力の紫外完備化を与えず、階層性問題を解決しない。

本稿の位置づけ（規律）：本稿が用いる物理はすべて標準的である——4次元ユークリッド運動量積分、 $\Omega_3 = 2\pi^2$ 、ヒッグス自己エネルギーの二次発散、ゴロフ＝サニョッティ（1986）、素朴次元解析（マノハー＝ジョージ 1984）。新しい定理は一つも証明しない。第3版の寄与は $16\pi^2$ の組成を分けることである——(i) $16\pi^2$ を規約×幾何×ヤコビアンに分解し、(ii) 規約であることをフーリエ規約の取り替えで示し、(iii) 系2.2の同型性が組成の異なる二つの数の一致であることを明示し、(iv) 4π の 4π が立体角ではないことを判定する。最重要の禁欲：「力学を含まない」を「幾何である」と読み替えない（論文95）。 $16\pi^2$ とパッチの $(4\pi)^2$ を同一の幾何量としない（注記2.3の限定を強める）。 4π を立体角と呼ばない（論文45）。カットオフによる発散の有限化を主張しない（第2版で撤回済・循環論法）。階層性問題を解決したと述べない（自然性の上限は観測的緊張下にある）。209/2880に幾何学的解釈を与えない（ワイルテンソルの縮約の組み合わせ論であり、起源が異なる）。量子重力の紫外完備化を与えない。第3層のレンズは非科学の札つきで隔離する。

1. 序：定理は正しい。訂正するのは、その呼び方である

第2版は二つの普遍的な係数を並べた——ヒッグス自己エネルギーの二次発散 $\Delta m_H^2 = \frac{\Lambda_{UV}^2}{16\pi^2} [\lambda_H - 6y_t^2 + \dots]$ と、ゴロフ＝サニョッティの2ループ発散 $\Gamma_{\text{div}}^{(2)} \propto \frac{1}{(16\pi^2)^2}$ 。そして両者が L ループ則 $(16\pi^2)^{-L}$ の二つの実例であることを示した。

この同定は正しい。第3版はそれを変更しない。

訂正するのは一点である——第2版は $\frac{1}{16\pi^2}$ を「力学的仮定を一切含まない純粋な幾何学的帰結」と呼んだ。前半は正しい。後半は正しくない。

2. 定理2.1（変更なし）

定理 2.1（ループ幾何測度）

4次元ユークリッド運動量積分は

$$\int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} F(k^2) = \frac{\Omega_3}{(2\pi)^4} \int_0^\infty k^3 dk F = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty k^3 dk F = \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty dk^2 k^2 F$$

に帰着する。ここで $\Omega_3 = \frac{2\pi^2}{\Gamma(2)} = 2\pi^2$ は単位3球面の表面積、最後の等号は $k^3 dk = \frac{1}{2} u du$ ($u = k^2$) による。

本稿で記号計算により再確認した。 L ループ振幅が $(16\pi^2)^{-L}$ を伴うこと（第2版の定理3.1）も、各積分に独立に適用するだけであり、そのまま成り立つ。

3. $16\pi^2$ を分解すると、身分の違う三つが出る

定理 3.1 ($16\pi^2$ の組成)

$$16\pi^2 = 2 \times \frac{(2\pi)^4}{\Omega_3}$$

（本稿で確認）。右辺の三つの因子は、それぞれ身分が違う。

因子	値	身分
$(2\pi)^4$	$16\pi^4$	規約（フーリエ変換の 2π をどこに置くか）
Ω_3	$2\pi^2$	幾何（単位3球面の表面積）
2	2	ヤコビアン（ $k^3 dk = \frac{1}{2} u du$ ）

観察 3.1 (幾何なのは Ω_3 だけである)

$\Omega_3 = 2\pi^2$ は、単位3球面という対象そのものが持つ量である。これは幾何である。 $(2\pi)^4$ は違う。それは $\int d^4k/(2\pi)^4$ という書き方から来ている。フーリエ変換の 2π を運動量側に全部置くか、両側に分けるか、置かないか——どれを選んでも物理は同じで、書かれる数だけが変わる。 2 も違う。それは動径変数を k から k^2 に取り替えたときのヤコビアンであり、どちらの変数で書くかという選択に付随する。

4. 規約であることの証拠 — 規約を変えると、数が変わる

フーリエの規約	$2(2\pi)^n/\Omega_3$
$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$ (場の量子論の標準)	$16\pi^2$
$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^2}$ (対称形)	4
$\int d^4k$ (2π なし)	$1/\pi^2$

本稿で確認した。

観察 4.1 (物理は動かない。数は動く)

どの規約でも物理的振幅は同じである——伝播関数と頂点にも 2π が付き直すからである。変わるのは、 $16\pi^2$ という数が書かれるかどうかだけである。目盛りを変えると答えが変わるものは、事実ではなく規約である (論文95)。この判定は、論文45 が $R = 2$ について下したものと同一形である。したがって「力学的仮定を一切含まない」は正しく、
「純粋な幾何学的帰結」は正しくない。力学を含まないことと、幾何であることは別である。規約もまた、力学を含まない。

5. 系2.2 の同型性 — 一致は数値であり、組成は違う

第2版は次を書いた。

$$16\pi^2 = \underbrace{\frac{(2\pi)^4}{\Omega_3} \times 2}_{\text{運動量空間測度の逆数}} = \underbrace{(4\pi) \times (4\pi)}_{\text{山岸ダブルトース境界}}$$

観察 5.1 (両辺の組成)

左辺	規約 × 幾何 × ヤコビアン
右辺	規約 × 規約 (パッチ定数は任意の $a > 0$ でよい・論文116)

数値は一致する。組成は完全に違う。第2版の注記2.3 は正しかった——「本稿が厳密に主張するのは定理2.1 のみであり、山岸幾何との同型性は解釈上の対応として提示する」。第3版はその限定に理由を与える：左辺がフーリエの規約に汚染されているため、たとえ両者を結ぶ変換を見つけたとしても、それは幾何どうしの対応にならない。ゆえに同型性は、解釈としても弱い。本版は数値の一致の記録に留める。

6. $4\pi v$ の 4π は、立体角ではない

確立された事実 6.1 (自然性の上限 (数値は変更なし))

$\frac{\Lambda^2}{16\pi^2} \lesssim v^2$ より $\Lambda \lesssim \sqrt{16\pi^2} v = 4\pi v$ 。 $v = 246$ GeV を代入して 3091 GeV = 3.09 TeV。トップ湯川による $-6y_t^2$ を考慮すると $4\pi v/\sqrt{6} = 1262$ GeV = 1.26 TeV (本稿で確認)。

観察 6.1 (呼び方だけを訂正する)

第2版はこれを「立体角 4π で表される検証可能な上限」と呼んだ。数値も、検証可能性も、観測的緊張の指摘も正しい。訂正するのは「立体角」という語である。この 4π は $\sqrt{16\pi^2}$ 、すなわちループ因子の平方根であり、前節までに見たとおり規約×幾何×ヤコビアンである。立体角ではない。これは論文45 が自分の中に見つけたのと同型である——あちらでは面積を立体角と呼んでいた。こちらではループ因子の平方根を立体角と呼んでいる。正しい言い方は「素朴次元解析の 4π 勘定」である (マノハー = ジョージ 1984。第2版が既に文献に挙げていた)。上限そのものは何も変わらない。

7. 第2版が正しく撤回したもの（本版でも復活しない）

確立された事実 7.1 (カットオフ循環論法の撤回)

第2版は、初版のボクセルカットオフ論法—— $\Lambda_{\text{voxel}} = (16\pi^2)^{-1/2}$ を手で導入して発散を有限化する——を循環論法として撤回した。結論（有限性）が仮定（有限カットオフ）に既に含まれているからである。摂動的繰り込み不可能性というゴロフ＝サニョッティの内容は、カットオフの導入によっては解消されない。

この撤回は妥当であり、本版でも復活させない。あわせて第2版が保った規律も変更しない——LHC が TeV スケールまで新物理を見ておらず、自然性の上限が既に観測的緊張下にあることの明記、209/2880 に幾何学的解釈を与えないこと（ワイルテンソルの3次縮約の組み合わせ論であり、 $16\pi^2$ とは起源が違う）、一般相対論を有効場理論として位置づけること。

観察 7.1 (「各ループが幾何容量を消費する」という読みについて)

第2版の考察節は、 L ループが $(16\pi^2)^{-L}$ で抑制されることを「各ループが一つのダブルトース境界容量を消費する」と読んだ。抑制の事実は正しい—— $16\pi^2 \approx 158$ という大きさが、1ループ補正が典型的に 10^{-2} の桁に収まる理由を定量的に与える。これは標準的なループ勘定であり、変更しない。だが「幾何容量を消費する」という読みは、 $16\pi^2$ が幾何であることを前提にしている。前節までに見たとおり、幾何なのは Ω_3 だけである。よってこの読みは第3層として本文から外す。

8. 射程の書き直し

項目	何であるか
$\int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} F = \frac{1}{16\pi^2} \int dk^2 k^2 F$	事実（定理2.1・変更なし）
L ループが $(16\pi^2)^{-L}$ を伴うこと	事実（定理2.1 の L 回適用）
$\Omega_3 = 2\pi^2$	幾何
$(2\pi)^4$	フーリエの規約（変えると数が動く）
$k^3 dk = \frac{1}{2} u du$ の 2	ヤコビアン
$16\pi^2$ が「純粋な幾何」であること	撤回（三つの身分の積である）
$16\pi^2 = (4\pi)^2$ の同型性	数値の一致（組成が違う・解釈としても弱い）
$\Lambda \lesssim 4\pi v = 3.09 \text{ TeV}$	事実（素朴次元解析・観測的緊張下）
その 4π が立体角であること	撤回（ループ因子の平方根である）
カットオフによる発散の有限化	撤回済（循環論法・第2版）
209/2880 の幾何学的解釈	与えない（起源が違う）
量子重力の紫外完備化	与えない

十二行のうち、確定的な事実は四行である。残りは規約、ヤコビアン、撤回、あるいは「与えない」である。

9. 結び

本稿は $16\pi^2$ の正体を探していた。見つけたものは本物である——4次元ユークリッド運動量積分は、確かに $\frac{1}{16\pi^2} \int dk^2 k^2$ に帰着する。

だがその $16\pi^2$ は、三つの身分の積だった。単位3球面の表面積という幾何、フーリエ変換の 2π をどこに置くかという規約、そして変数変換のヤコビアン。

規約を取り替えれば、同じ組み合わせは 4 にも $1/\pi^2$ にもなる。物理は一ミリも動かない。動くのは、私たちが書き留める数のほうである。

力学を含まないものが、幾何とは限らない。

規約もまた、力学を含まない。

示さないこと（禁欲）：「力学を含まない」を「幾何である」と読み替えない（論文95）／ $16\pi^2$ とパッチの $(4\pi)^2$ を同一の幾何量としない（組成が違う・論文116）／ 4π を立体角と呼ばない（ループ因子の平方根・論文45）／カットオフによる発散の有限化を主張しない（循環論法・第2版で撤回済）／階層性問題を解決したと述べる（上限は観測的緊張下にある）／209/2880 に幾何学的解釈を与えない（起源が違う）／量子重力の紫外完備化を与えない／「各ループが幾何容量を消費する」という読みを本文に置かない（第3層・非科学の札つきで隔離）／新しい数学も予言もない（第2層）。

改訂記録

第3版（2026年8月）：定理2.1（ループ測度）と定理3.1（ L ループ則）は変更していない（記号計算で再確認）。第2版が撤回したカットオフ循環論法も、本版で復活させない。(i) $\frac{1}{16\pi^2}$ を「純粋な幾何学的帰結」と呼んだ点を撤回した—— $16\pi^2 = 2 \times (2\pi)^4 / \Omega_3$ であり、 $(2\pi)^4$ はフーリエの規約、 $\Omega_3 = 2\pi^2$ は幾何、 2 はヤコビアンという身分の違う三つの積である。幾何なのは Ω_3 だけである。(ii) 規約であることをフーリエ規約の取り替えで示した—— $\int d^4k / (2\pi)^2$ なら 4 、 $\int d^4k$ なら $1/\pi^2$ （本稿で確認）。物理的振幅は動かず、書かれる数だけが動く（論文95）。「力学的仮定を含まない」は正しく、「幾何である」は正しくない。(iii) 系2.2 の同型性について、左辺が規約×幾何×ヤコビアン、右辺が規約×規約であり組成が完全に違うことを明示した。第2版の注記2.3（同型性は解釈である）は正しく、本版はその理由を書き、同型性を数値の一致の記録に留めた。(iv) $\Lambda \lesssim 4\pi v$ の「立体角 4π で表される上限」という呼び方を撤回した——この 4π は $\sqrt{16\pi^2}$ 、すなわちループ因子の平方根であり立体角ではない。正しくは素朴次元解析の 4π 勘定である（マノハー＝ジョージ 1984）。数値（3091 GeV、 $\sqrt{6}$ 込みで 1262 GeV）も観測的緊張の明記も変更しない。(v) 「各ループが幾何容量を消費する」という読みを第3層として本文から外した（抑制の事実そのものは標準的なループ勘定として保つ）。

番号について：本稿は初版の論文46と論文47を統合したものである。統合以前は「論文46」と併記していたが、内容が一本である以上、番号は論文46に一本化する。番号47は、以後この統合を指す欠番として空けておく（別の論文に再利用しない）。

参考文献

1. Goroff, M. H. & Sagnotti, A. (1986). *The Ultraviolet Behavior of Einstein Gravity*. Nuclear Physics B 266, 709--736.
2. 't Hooft, G. & Veltman, M. (1974). *One-Loop Divergencies in the Theory of Gravitation*. Annales de l'Institut Henri Poincaré A 20, 69--94.

3. Susskind, L. (1979). *Dynamics of Spontaneous Symmetry Breaking in the Weinberg--Salam Theory*. Physical Review D 20, 2619-2625.
4. Donoghue, J. F. (1994). *General Relativity as an Effective Field Theory: The Leading Quantum Corrections*. Physical Review D 50, 3874--3888.
5. Manohar, A. & Georgi, H. (1984). *Chiral Quarks and the Non-Relativistic Quark Model*. Nuclear Physics B 234, 189--212. (素朴次元解析と 4π 勘定)
6. Peskin, M. E. & Schroeder, D. V. (1995). *An Introduction to Quantum Field Theory*. Addison-Wesley. (ループ積分の測度とフーリエ規約)
7. Yamagishi, Y. (2026). *Convention and Fact* [論文95]. Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.21758621>
8. Yamagishi, Y. (2026). *What Does the Exponent of $\mathbf{c}$ Count?* [論文116]. Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.22003794>
9. Yamagishi, Y. (2026). *An Area Is Not a Solid Angle* [論文45]、第3版. Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.21602337>
10. Yamagishi, Y. (2026). *The Power of 4π Is the Mass Dimension* [論文44]、第3版. Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.21602231>
11. Yamagishi, Y. (2026). *Keep the Patch Constant as a Letter and the Ambiguity Dissolves* [論文43]、第3版. Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.21602132>
12. Yamagishi, Y. (2026). *Two 4π in $4\pi\mathbf{G}$* [論文35]、第3版. Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.21430118>
13. Yamagishi, Y. (2026). *$16\pi^2$: Fact times Fact* [論文09]、第3版. Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.21404525>

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)