

全部を合わせられないことは、証明された事実である

— 完全五度を 12 回積むと 7 オクターブを **23.4600** セント超える — 平均律はこれを 12 等分して配り、五度のずれを **1.9550** セントに抑える — ところが長三度のずれは **-13.6863** セントで、五度の **7.0007** 倍残る — [論文466]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

平均律は妥協の産物だと言われる。本稿が示すのは、妥協せざるを得ないことが数で決まっていることである—— $(3/2)^{12}$ と 2^7 が一致しないのは、**2** と **3** が互いに素だからである。新しい定理も法則も主張しない。第一に、五度を 12 回積むと 7 オクターブを **23.4600** セント超える（第2節）。第二に、平均律の五度のずれ **1.9550** セントは、そのコンマのちょうど 12 分の 1 である（第2節）。第三に、これが本稿の芯である。長三度のずれは **-13.6863** セントで、五度の **7.0007** 倍ある（第3節）。第四に、三度の側のコンマは **21.5063** セントで、五度の側の **23.4600** とは別物である（第3節）。第五に、平均律は五度を合わせ、三度を犠牲にしている（第3節）。第六に、分離子は「近似の誤差か、閉じないことの証拠か」である（第4節）。キーワード：音律、平均律、ピタゴラスのコンマ、シントニックコンマ、純正律。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——ピタゴラスのコンマ、シントニックコンマ、十二平均律はすべて既知である。音楽を評価しない——どの音律が美しいか、どう演奏すべきかは主題ではない。聴覚を論じない——うなり、可聴限界、和音の協和感は主題ではない。比の計算だけを見る。歴史を扱わない——中全音律、ヴェルクマイスター、キルンベルガーなどの経緯は主題ではない。楽器を論じない——調律の実務、インハーモニシティ、可変音律は主題ではない。既刊との関係：論文465 は材質より大きさが 40 倍効くことを示した——そこでも、二つの因子の大小が問題だった。論文300 は同根か別根かが判定できることを示した——「五度のコンマ」と「三度のコンマ」は、その基準で別根である。論文459 は往復すれば損失が 1.9 倍になることを示した——そこでも、積み重ねが幕になっていた。加えたのは、ピタゴラスのコンマを **23.4600** セントと出して既知と照合したこと、平均律の五度のずれがコンマの 12 分の 1 と厳密に一致することを示したこと、三度のずれを **-13.6863** セントと出したこと、比を **7.0007** 倍と出したこと、二つのコンマが別物であることを示したこと、分離子を「近似の誤差か、閉じないことの証拠か」に置いたことである。

1. 記法と問い

設定：二つの音の高さの隔たりを、周波数比の対数で測る。単位はセントで、

$$c = 1200 \log_2 \frac{f_2}{f_1}$$

と定める。オクターブは **1200** セントである。純正な完全五度は周波数比 $3/2$ 、純正な長三度は $5/4$ である。十二平均律では、五度は $2^{7/12}$ 、長三度は $2^{4/12}$ となる。

観察 1.1

平均律は妥協の産物と言われる。どの調でも同じように弾けるかわりに、どの和音も少しずれている——そう説明される。

観察 1.2

だが「妥協」という言い方は、うまくやれば避けられるように聞こえる。避けられない——それが数で決まっていることを見る。

問い：どれだけずれ、どこへ配られているのか。

2. 五度を十二回積むと 23.4600 セント余る

計算 2.1：純正五度を 12 回積んだ比と、7 オクターブの比を比べる。

$(3/2)^{12}/2^7 = 1.013643265$ 、すなわち **23.4600** セントである。

観察 2.2

既知のピタゴラスのコンマ **23.46** セントと一致する。独立な確認である——1 を超えているので、円環が閉じていない。

観察 2.3

閉じないのは、2 と 3 が互いに素だからである。 $3^{12} = 531441$ と $2^{19} = 524288$ は決して等しくならない——どんな整数の組でも $2^a = 3^b$ にはならない。

計算 2.4：平均律の五度と純正五度のずれを出す。

1.9550 セントである（純正 **1.500000**、平均律 **1.498307**）。

観察 2.5

これはコンマのちょうど 12 分の 1 である。 $23.4600/12 = 1.9550$ と厳密に一致——平均律とは、閉じない分を 12 等分して配ることである。

観察 2.6

1.9550 セントは、ほとんど聞き分けられない。五度に関するかぎり、平均律はよくできている——問題は別のところにある。

3. 三度は五度の 7.0007 倍ずれている

計算 3.1：純正長三度と平均律長三度のずれを出す。

音程	純正	平均律とのずれ [セント]
完全五度	1.500000	1.9550
長三度	1.250000	−13.6863

観察 3.2

三度のずれは五度の **7.0007** 倍ある。**13.6863** 対 **1.9550**——同じ平均律の中で、音程によって精度がまったく違う。

観察 3.3

符号が逆である。五度は平均律のほうが低く、三度は平均律のほうが高い——**-13.6863** という負号がそれを示している。

計算 3.4：三度の側のコンマ（シントニックコンマ）を出す。

$(3/2)^4/2^2$ と $5/4$ の比は **21.5063** セントである。

観察 3.5

既知のシントニックコンマ **21.51** セントと一致する。独立な確認である——そしてピタゴラスのコンマ **23.4600** とは **1.9537** セント違う。

観察 3.6

つまり閉じない場所が二つある。一つは **2** と **3** の間、もう一つは **2**、**3** と **5** の間——別々の素数に由来する、別々のずれである。

観察 3.7

平均律は前者だけを **12** 等分して片づけ、後者を放置している。だから五度は **1.9550**、三度は **13.6863** ——どちらを合わせるかを選んだ結果である。

4. 分離子

分離子：近似の誤差か、閉じないことの証拠か。

観察 4.1

近似の誤差なら、精度を上げれば減らせる。計算を細かくすればよい——原理的な壁は無い。

観察 4.2

閉じないことの証拠なら、どんな精度でも消えない。 $2^a = 3^b$ を満たす正の整数が無いから——**23.4600** セントは、測定の誤差ではなく算術の帰結である。

観察 4.3

これは論文300の基準で別根である。どちらも「音律のずれ」と呼ばれる——一方は**2**と**3**の非可換性、一方は**5**を加えたときの非可換性である。

観察 4.4

だから「もっとよい音律」を探しても、二つを同時にはゼロにできない。どちらを合わせるかを選ぶだけである——中全音律は三度を合わせて五度を犠牲にし、平均律はその逆をした。

観察 4.5

論文459と同じ場所にいる。そこでは効率が段を重ねると冪になった——ここでは五度を重ねると冪になり、**2**の冪と決して出会わない。どちらも、積み重ねが指数を作っている。

観察 4.6

論文465とも重なる。そこでは二つの因子の大小が答えを決めた——ここでは二つのコンマの大小が、どちらを犠牲にするかを決めている。

観察 4.7

正直に言えば——どのずれが聞こえるかは論じていない。**13.6863** セントが実際にどう聞こえるかは、和音、音域、音色、うなりで変わる——ここで言えるのは、ずれが数として避けられないことまでである。

5. 点呼と結び

1. コンマは **23.4600** セント（計算 2.1）：既知と一致。
2. **2** と **3** が互いに素だから（観察 2.3）： $3^{12} \neq 2^{19}$ 。
3. 五度のずれは **1.9550** セント（計算 2.4）：コンマの 12 分の 1。
4. 厳密に一致する（観察 2.5）：等分して配っている。
5. 三度のずれは **-13.6863** セント（計算 3.1）：本稿の芯。
6. 五度の **7.0007** 倍（観察 3.2）：音程で精度が違う。
7. 符号が逆（観察 3.3）：三度は平均律のほうが高い。
8. シントニックコンマは **21.5063**（計算 3.4）：別物である。
9. 分離子は近似の誤差か閉じないことか（観察 4.3）：論文300 の基準で別根。
10. 同時にゼロにはできない（観察 4.4）：どちらを選ぶかだけ。

結び：平均律は妥協の産物だと言われる——どの調でも同じように弾けるかわりに、どの和音も少しずれている、と説明される。だが「妥協」という言い方は、うまくやれば避けられるように聞こえる。避けられない——それが数で決まっている。閉じないことは、算術の帰結である——純正五度を 12 回積むと 7 オクターブを **1.013643265** 倍、すなわち **23.4600** セント超える。既知のピタゴラスのコンマと一致する。閉じないのは **2** と **3** が互いに素だからで、 $3^{12} = 531441$ と $2^{19} = 524288$ は決して等しくならず、どんな整数の組でも $2^a = 3^b$ にはならない。平均律の五度のずれ **1.9550** セントは、そのコンマのちょうど 12 分の 1 と厳密に一致する。平均律とは、閉じない分を 12 等分して配ることである。**1.9550** セントはほとんど聞き分けられず、五度に関するかぎり平均律はよくできている。問題は三度にある——長三度のずれは **-13.6863** セント、五度の **7.0007** 倍ある。同じ平均律の中で、音程によって精度がまったく違う。しかも符号が逆で、五度は平均律のほうが低く、三度は平均律のほうが高い。三度の側のコンマ（シントニックコンマ）は **21.5063** セントで、既知の値と一致し、ピタゴラスのコンマ **23.4600** とは **1.9537** セント違う。つまり閉じない場所が二つある——一つは **2** と **3** の間、もう一つは **2**、**3** と **5** の間で、別々の素数に由来する別々のずれである。平均律は前者だけを 12 等分して片づけ、後者を放置している。だから五度は **1.9550**、三度は **13.6863** で、どちらを合わせるかを選んだ結果である。分けているものは一つ——近似の誤差か、閉じないことの証拠か。近似の誤差なら精度を上げれば減らせて、原理的な壁は無い。閉じないことの証拠なら、どんな精度でも消えない。 $2^a = 3^b$ を満たす正の整数が無いのだから、**23.4600** セントは測定の誤差ではなく算術の帰結である。論文300 の基準で別根であり、一方は **2** と **3** の非可換性、一方は **5** を加えたときの非可換性である。だから「もっとよい音律」を探しても、二つを同時にゼロにはゼロにできない。どちらを合わせるかを選ぶだけで、中全音律は三度を合わせて五度を犠牲にし、平均律はその逆をした。論文459 と同じ場所にいて、そこでは効率が段を重ねると冪になった。ここでは五度を重ねると冪になり、**2** の冪と決して出会わない。論文465 と重なり、そこでは二つの因子の大小が答えを決めた。ここでは二つのコンマの大小が、どちらを犠牲にするかを決めている。正直に言えば——どのずれが聞

こえるかは論じていない。**13.6863** セントが実際にどう聞こえるかは和音、音域、音色、うなりで変わる。ここで言えるのは、ずれが数として避けられないことまでである。

参考文献

1. Euler, L. (1739). *Tentamen Novae Theoriae Musicae*. Academiae Scientiarum Petropolitanae.
 2. Helmholtz, H. von (1863). *Die Lehre von den Tonempfindungen*. Vieweg.
 3. Barbour, J. M. (1951). *Tuning and Temperament: A Historical Survey*. Michigan State College Press.
 4. Benson, D. J. (2007). *Music: A Mathematical Offering*. Cambridge University Press.
 5. 山岸勇輝 (2026). 『三百本目の点呼 — 同根か別根かは、判定できる』 [論文300]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22171914
 6. 山岸勇輝 (2026). 『九割の効率が二度あれば、残るのは八割一分である』 [論文459]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22733103
 7. 山岸勇輝 (2026). 『材質を変えるより、小さくするほうが四十倍効く』 [論文465]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22733260
-

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)