

混みぐあいを一割上げたときの待ち時間は、いまどこにいるかで決まる

— 利用率を 0.50 から 0.55 へ上げると待ちは **1.2222** 倍だが、0.90 から 0.99 へ上げると **11.0000** 倍になる — どちらも同じ「1 割増」である — 利用率 0.99 での待ちは **99.0000** 分、0.50 の **99** 倍である —

[論文469]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

混雑は投入量に比例して悪くなる、と思われている。本稿が示すのは、同じ 1 割増でも、いまどこにいるかで待ちが **9** 倍違うことである——そしてその比は、閉じた式で書ける。新しい定理も法則も主張しない。第一に、利用率 0.50 での待ちは、サービス時間ちょうど **1.000000000000** 個ぶんである（第2節）。第二に、利用率 0.90 では **9.000000000000** 倍、0.99 では **99.0000** 分になる（第2節）。第三に、これが本稿の芯である。同じ 1 割増でも、0.50 → 0.55 は **1.2222** 倍、0.90 → 0.99 は **11.0000** 倍である（第3節）。第四に、その比は閉じた式 $a(1-\rho)/(1-a\rho)$ と厳密に一致する（第3節）。第五に、余裕を 1000 分の 1 にすると、待ちは **1001.000000** 倍になる（第3節）。第六に、分離子は「投入に比例するか、余裕の逆数で効くか」である（第4節）。キーワード：待ち行列、M/M/1、リトルの法則、利用率、待ち時間。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——待ち行列の M/M/1 模型、リトルの法則はすべて既知である。系を設計しない——窓口数、優先順位、予約、割込みは主題ではない。M/M/1 に限る——到着がポアソン、サービスが指数分布、窓口が一つ。実際の系はこの仮定を満たさないことが多い。ばらつきを扱わない——平均だけを見る。分散や分位点は主題ではない。人の行動を扱わない——離脱、再来、行列を見て諦めることは主題ではない。既刊との関係：論文308 はあなたが乗るバスの間隔が平均の 2 倍になることを示し、射程注記で「待ち行列理論を作らない」と明記していた——本稿はその予約席を埋める。論文300 は同根か別根かが判定できることを示した——「投入量」と「余裕」は、その基準で別根である。論文468 は同じ倍率でも高い側では効きが落ちることを示した——そこでも、起点が効果を決めた。ここでは向きが逆で、高い側ほど効きが大きい。加えたのは、五つの利用率で待ちを出したことで、同じ 1 割増の効きを **1.2222** 倍と **11.0000** 倍と出したこと、比が閉じた式と厳密に一致することを示したこと、余裕を 1000 分の 1 にすると **1001.000000** 倍になることを示したこと、分離子を「投入か余裕か」に置いたことである。

1. 記法と問い

設定：到着率 λ 、サービス率 μ の窓口一つの系で、利用率を $\rho = \lambda/\mu$ とする。 $M/M/1$ の平均系内数と平均待ち時間は

$$L = \frac{\rho}{1-\rho}, \quad W_q = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

である。以下 $\mu = 1$ （1 件を 1 分で処理）とする。

観察 1.1

混雑は投入量に比例して悪くなる、と思われている。1 割多く来れば 1 割待つ——直線的な像である。

観察 1.2

だが式の分母には $1 - \rho$ がある。効いているのは投入量ではなく、残っている余裕である——余裕がゼロに近づくと、逆数が跳ね上がる。

問い：同じ 1 割増が、どこでどれだけ効くのか。

2. 利用率 0.99 で待ちは 99 分になる

計算 2.1：五つの利用率で、系内数と待ち時間を出す。

利用率	平均系内数 [件]	平均待ち [分]
0.50	1.0000	1.0000
0.80	4.0000	4.0000
0.90	9.0000	9.0000
0.95	19.0000	19.0000
0.99	99.0000	99.0000

観察 2.2

利用率 0.50 の待ちは、ちょうど **1.000000000000** 分である。サービス時間そのもの——式が正しく置かれていることの確認になる。

観察 2.3

0.50 から 0.90 へ上げると、待ちがちょうど **9.000000000000** 倍になる。投入は 1.8 倍にしかしていない——1.8 倍の投入が、9 倍の待ちになる。

観察 2.4

0.99 では **99.0000** 分である。投入を 1.98 倍にして、待ちは 99 倍——比例からは遠く離れている。

観察 2.5

利用率 0 では待ちがちょうど **0.0000000000000000** である。誰もいなければ待たない——両端で式が正しく振る舞う。

3. 同じ一割増が、1.2222 倍にも 11.0000 倍にもなる

計算 3.1：利用率を 1.1 倍にする操作を、二つの起点で行う。

操作	待ちの変化	倍率
0.50 → 0.55	1.0000 → 1.2222 分	1.2222
0.90 → 0.99	9.0000 → 99.0000 分	11.0000

観察 3.2

同じ 1 割増が、9 倍違う効きになる。1.2222 対 11.0000——どこにいるかを言わなければ、「1 割増える」に意味がない。

観察 3.3

この比は閉じた式 $a(1 - \rho)/(1 - a\rho)$ と厳密に一致する。 $a = 1.1$ 、 $\rho = 0.50$ で 1.2222、 $\rho = 0.90$ で 11.0000——数値と式が同じ値に落ちる。

観察 3.4

効いているのは $1 - \rho$ 、すなわち余裕である。0.50 では余裕が 0.50、0.90 では 0.10——同じ 1 割増が、余裕を 10 分の 1 にするか、9 割にするかの違いになる。

計算 3.5：余裕を 10^{-3} 、 10^{-6} 、 10^{-9} と縮めたときの待ちを出す。

余裕 $1 - \rho$	待ち [分]
10^{-3}	9.990000×10^2
10^{-6}	9.999990×10^5
10^{-9}	1.000000×10^9

観察 3.6

余裕を 1000 分の 1 にすると、待ちは 1001.000000 倍になる。ほぼ反比例——待ちと余裕の積が 1 に収束する (10^{-9} で 1.000000027)。

観察 3.7

だから「あと少し詰められる」は、最も高くつく判断である。余裕の残り少ないところで削るから——同じ削り方が、空いているうちならほとんど効かない。

4. 分離子

分離子：投入に比例するか、余裕の逆数で効くか。

観察 4.1

比例するなら、どこで増やしても同じだけ悪くなる。1割増は1割悪化——見積もりが立てやすい。

観察 4.2

余裕の逆数なら、残りが少ないほど跳ねる。 $1 - \rho$ が分母にあるから——同じ操作が、起点で9倍違う。

観察 4.3

これは論文300の基準で別根である。どちらも「混みぐあい」と呼ばれる——一方は投入の量、一方は残っている余裕の量である。

観察 4.4

論文468と同じ場所にて、向きが逆である。そこでは同じ倍率の操作が高い側で効きを1.48分の1に落とした——ここでは高い側で9倍に増やす。どちらも起点が効果を決めるが、増える側か減る側かが違う。

観察 4.5

論文308の予約席を埋めている。そこではあなたが乗るバスの間隔が平均の2倍になることを示し、射程注記で「待ち行列理論を作らない」と明記していた——本稿がその席に入る。

観察 4.6

だから稼働率の目標は、余裕として述べる。「90パーセント稼働」ではなく「余裕10パーセント」——同じことを言っているが、95へ上げるのが余裕を半分にすることだと分かる。

観察 4.7

正直に言えば—— $M/M/1$ に限っている。到着がポアソンでサービスが指数分布という仮定は、実際の系では満たされないことが多い——99 分という値はこの模型に依るが、余裕の逆数で効くという結論は、待ち行列の広い族で成り立つ。

5. 点呼と結び

1. 利用率 0.50 で待ち 1.000000000000 分（観察 2.2）：式の確認。
2. 0.90 で 9.000000000000 倍（観察 2.3）：投入は 1.8 倍。
3. 0.99 で 99.0000 分（計算 2.1）：比例から遠い。
4. 0.50 → 0.55 で 1.2222 倍（計算 3.1）：本稿の芯。
5. 0.90 → 0.99 で 11.0000 倍（計算 3.1）：同じ 1 割増。
6. 閉じた式と厳密に一致（観察 3.3）： $a(1-\rho)/(1-a\rho)$ 。
7. 効いているのは余裕（観察 3.4）： $1-\rho$ が分母。
8. 余裕 1000 分の 1 で 1001.000000 倍（観察 3.6）：ほぼ反比例。
9. 分離子は投入か余裕か（観察 4.3）：論文300 の基準で別根。
10. 論文308 の予約席（観察 4.5）：そこが待ち行列を除いていた。

結び：混雑は投入量に比例して悪くなる、と思われている——1 割多く来れば 1 割待つ、という直線的な像である。だが式の分母には $1-\rho$ があり、効いているのは投入量ではなく残っている余裕で、余裕がゼロに近づくとき逆数が跳ね上がる。まず、待ちそのものが比例から遠い——利用率 0.50 での待ちはちょうど

1.000000000000 分、サービス時間そのものである。0.90 へ上げると待ちはちょうど 9.000000000000 倍になるが、投入は 1.8 倍にしかしていない。0.99 では 99.0000 分——投入を 1.98 倍にして、待ちは 99 倍である。そして利用率 0 では待ちがちょうど 0.0000000000000000 で、両端で式が正しく振る舞う。同じ「1 割増」が、起点で 9 倍違う——0.50 → 0.55 では待ちが 1.0000 から 1.2222 分へ 1.2222 倍、0.90 → 0.99 では 9.0000 から 99.0000 分へ 11.0000 倍になる。この比は閉じた式 $a(1-\rho)/(1-a\rho)$ と厳密に一致する。効いているのは $1-\rho$ 、すなわち余裕である。0.50 では余裕が 0.50、0.90 では 0.10 で、同じ 1 割増が余裕を 10 分の 1 にするか 9 割にするかの違いになる。余裕を 10^{-3} 、 10^{-6} 、 10^{-9} と縮めると待ちは 9.990000×10^2 、 9.999990×10^5 、 1.000000×10^9 分となり、1000 分の 1 にすると 1001.000000 倍。待ちと余裕の積は 1 に収束する。だから「あと少し詰められる」は最も高くつく判断である。余裕の残り少ないところで削るからで、同じ削り方が空いているうちならほとんど効かない。分けているものは一つ——投入に比例するか、余裕の逆数で効くか。比例するならどこで増やしても同じだけ悪くなり、1 割増は 1 割悪化で、見積もりが立てやすい。余裕の逆数なら残りが少ないほど跳ね、同じ操作が起点で 9 倍違う。論文300 の基準で別根であり、一方は投入の量、一方は

残っている余裕の量である。論文468と同じ場所にいて向きが逆である——そこでは同じ倍率の操作が高い側で効きを1.48分の1に落とし、ここでは高い側で9倍に増やす。そして論文308の予約席を埋めている。そこではあなたが乗るバスの間隔が平均の2倍になることを示し、射程注記で「待ち行列理論を作らない」と明記していた。だから稼働率の目標は余裕として述べる——「90パーセント稼働」ではなく「余裕10パーセント」と言えば、95へ上げるのが余裕を半分にする事だと分かる。正直に言えば—— $M/M/1$ に限っており、到着がポアソンでサービスが指数分布という仮定は実際の系では満たされることが多い。99分という値はこの模型に依るが、余裕の逆数で効くという結論は待ち行列の広い族で成り立つ。

参考文献

1. Erlang, A. K. (1909). Sandsynlighedsregning og Telefonsamtaler. *Nyt Tidsskrift for Matematik B*.
2. Little, J. D. C. (1961). A Proof for the Queuing Formula $L = \lambda W$. *Operations Research*.
3. Kleinrock, L. (1975). *Queueing Systems, Volume 1: Theory*. Wiley.
4. 山岸勇輝 (2026). 『三百本目の点呼 — 同根か別根かは、判定できる』 [論文300]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22171914
5. 山岸勇輝 (2026). 『あなたが乗るバスの間隔は、平均の2倍である』 [論文308]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22172305
6. 山岸勇輝 (2026). 『同じ倍率で上げても、高い側では効きが落ちる』 [論文468]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22733384

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)