

パフィアンの $2^n n!$ は、一つの塊である

— 第3版：山岸オイラー標数解凍の $(4\pi)^n n!$ は、切る場所が違っていた — [論文48]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月 (第3版)

— From thinking to syncing. —

要旨

本稿は、 $2n$ 次元チャーン＝ガウス＝ボネ定理の規格化定数が $(4\pi)^n n!$ で与えられることを示し、 $32\pi^2 = 2 \times 16\pi^2$ の因子2がパフィアン反対称化の $n! = 2!$ であると確定した。この確定は正しく、第3版でも変更しない——初版の「バッファ二重化」も論文32の「 $SU(2)$ 次元／二重被覆」も、撤回されたまま復活しない。第3版が訂正するのは、 $(4\pi)^n n!$ という切り方そのものである。第一に、導出を因子ごとに追うと、切れ目は別の場所にある。オイラー類は $e(TM) = \frac{1}{(2\pi)^n} \text{Pf}(\Omega)$ 、パフィアンは $\text{Pf}(\Omega) = \frac{1}{2^n n!} \epsilon^{a_1 \dots a_{2n}} \Omega_{a_1 a_2} \wedge \dots$ である。すなわち規格化定数は

$$(2\pi)^n \times (2^n n!)$$

であり（本稿で $n = 1, 2, 3, 4$ について確認）、 $2^n n!$ はパフィアンの反対称化因子という一つの塊である。第2版はその塊から 2^n を引き剥がし、 $(2\pi)^n$ に貼り付けて $(4\pi)^n$ を作っていた。第二に、これは第2版自身の発見と矛盾する。第2版は「 $n!$ はパフィアンの組合せ因子である」と正しく突き止めた。だが 2^n は同じ出所である—— $\frac{1}{2^n n!}$ はパフィアンの定義に現れる一つの分母であり、 $2n$ 個の添字を n 組の反対称ペアに分ける操作の総数を数えている。 $n!$ を組合せ論に帰しながら 2^n を幾何側に渡すことはできない。第三に、身分は二つである。 $(2\pi)^n$ は特性類の周期が整数になるようにする規格化（チャーン＝ヴェイユの規約）、 $2^n n!$ は組合せ論である。 $(4\pi)^n$ という量は、この二つをまたいで括り直したものであり、そこに現れる 4π は立体角ではない（論文45・46と同型）。第四に、それゆえ第4節の結論を一行だけ訂正する。第2版は「三者に共通しているのは因子2ではなく、土台となる $(4\pi)^n$ の方である」と結んだ。因子2が三者三様であるという判定は正しく、そのまま保つ——オイラー標数は組合せ論、チャーン類は成分展開、 θ 項は生成子規格化。訂正するのは土台の名である：共通しているのは $(4\pi)^n$ ではなく、特性類の規格化に現れる (2π) である。数値はすべて変更しない——2次元 4π 、4次元 $32\pi^2$ 、6次元 $384\pi^3$ 、そして2次元での古典ガウス＝ボネとの整合（ $R = 2K$ 経由）もそのまま成り立つ（本稿で再確認）。射程：確立された標準的事実の構造的解釈と自己点検（第2層）。新しい定理も予言もない。宇宙OSのレンズは非科学の札つきで隔離する。

本稿の位置づけ（規律）：本稿が用いる数学はすべて標準的である——チャーン（1944, 1945）のガウス＝ボネ、オイラー類とパフィアン、特性類の規格化。新しい定理は一つも証明しない。第3版の寄与は切れ目を正しい場所に置き直すことである——(i) 規格化定数が $(2\pi)^n \times (2^n n!)$ であることを因子ごとに示し、(ii) $2^n n!$ がパフィアンの一つの塊であることを述べ、(iii) $(4\pi)^n$ がその塊をまたいで作られた量であることを明示し、(iv) 第4節の「共通の土台」を $(4\pi)^n$ から (2π) に訂正する。最重要の禁欲： 2^n を $n!$ から切り離さない（同じパフィアンの分母である・論文13・14のモジュール分割の禁止と同型）。 $(4\pi)^n$ の 4π を立体角と呼ばない（論文45・46）。因子2の三つの起源を統合しない（第2版の判定を保つ・論文86・100）。初版の「バッファ二重化」と論文32の「 $SU(2)$ 次元／二重被覆」を復活させない（第2版で撤回済）。オイラー標数について新しい定理を主張しない。第3層のレンズは非科学の札つきで隔離する。

1. 序：確定は正しかった。訂正するのは、切り方である

第2版は懸案を一つ確定させた—— $32\pi^2 = 2 \times 16\pi^2$ の因子2は、パフィアン反対称化に由来する組合せ因子 $n! = 2!$ である。そして初版の「フロント／バックのバッファ二重化」と、論文32の「 $SU(2)$ 基本表現の次元、あるいは S^2 の二重被覆」という推測を、いずれも撤回した。

この確定は正しい。第3版でも復活させない。

だが第2版は、その確定を書き出すときに、切れ目を一箇所ずらしていた。

2. 導出を因子ごとに追う

定理 2.1 (規格化定数の自然な分解)

オイラー類は $e(TM) = \frac{1}{(2\pi)^n} \text{Pf}(\Omega)$ 、パフィアンは

$$\text{Pf}(\Omega) = \frac{1}{2^n n!} \epsilon^{a_1 a_2 \dots a_{2n}} \Omega_{a_1 a_2} \wedge \dots \wedge \Omega_{a_{2n-1} a_{2n}}$$

であるから、 $\chi(M) = \int_M e(TM)$ の規格化定数は

$$(2\pi)^n \times (2^n n!)$$

である。

数値確認（本稿で $n = 1, 2, 3, 4$ について実施）：

n	$(2\pi)^n$	$2^n n!$	積	$(4\pi)^n n!$
1	2π	2	4π	4π
2	$4\pi^2$	8	$32\pi^2$	$32\pi^2$
3	$8\pi^3$	48	$384\pi^3$	$384\pi^3$
4	$16\pi^4$	384	$6144\pi^4$	$6144\pi^4$

どの n でも一致する。数は同じである。切り方が二通りある。

3. $2^n n!$ は、一つの塊である

第2版の切り方	$(4\pi)^n \times n!$
自然な切り方	$(2\pi)^n \times (2^n n!)$

観察 3.1 (第2版の発見と、矛盾する)

第2版は正しく突き止めた——「 $n!$ はパフィアンの定義に現れる因子であり、 $2n$ 個の添字を n 組の反対称ペアへ分割する際のペアの並べ替えの総数に対応する」。だが 2^n は同じ出所である。パフィアンの分母は $2^n n!$ という一つの数であり、これ全体が反対称化の勘定である—— $n!$ がペアの並べ替え、 2^n が各ペア内の入れ替えを数えている。 $n!$ を組合せ論に帰しながら、 2^n を幾何の側に渡すことはできない。 $(4\pi)^n = (2\pi)^n \times 2^n$ という量は、 2^n をパフィアンの塊から引き剥がして規格化の側に貼り付けて作られている。これは体系自身が禁じた形である——論文13・14 は、モジュールのブロックを「 $\pi \times$ 数」にぶつ切りしてはならないと定めた。ここで起きているのは逆方向の同じ操作、別のブロックから因子を借りて新しいブロックを作ることである。

4. 身分は二つである

因子	値 ($n = 2$)	身分
$(2\pi)^n$	$4\pi^2$	規約（特性類の周期が整数になるようにする規格化）
$2^n n!$	8	組合せ論（パフィアンの反対称化因子）

観察 4.1 $((4\pi)^n$ の 4π は立体角ではない)

$(2\pi)^n$ は曲率2形式を $\Omega/2\pi$ の形で入れるという規約から来ている——これは特性類の周期を整数にするための書き方であり、幾何そのものではなく、幾何を整数で読むための目盛りである。したがって $(4\pi)^n$ に現れる 4π は、規約の 2π と組合せ論の 2 を掛けたものであり、立体角ではない。これは論文 45・46 が自分の中に見つけたのと同じ形である——45 では面積を、46 ではループ因子の平方根を立体角と呼んでいた。ここでは規約と組合せ論の積を立体角と呼んでいる。

5. 第2節の2次元検算（変更なし）

確立された事実 5.1 (2次元での整合)

定理2.1 は $n=1$ で $\chi = \frac{1}{4\pi} \int_M R \sqrt{g} d^2x$ を与える。古典的ガウス＝ボネ $\int_M K dA = 2\pi\chi$ と、2次元でのスカラー曲率とガウス曲率の関係 $R = 2K$ から

$$\frac{1}{4\pi} \int R dA = \frac{1}{4\pi} \cdot 2 \int K dA = \frac{1}{4\pi} \cdot 2 \cdot 2\pi\chi = \chi$$

(本稿で再確認)。

低次元の値もすべて変更しない——2次元 4π 、4次元 $32\pi^2$ 、6次元 $384\pi^3$ 。

6. 因子2の三つの起源（第2版の判定を保つ）

確立された事実 6.1 (第4節の分析は正しい)

位相不変量	規格化	因子2の起源
オイラー標数 χ	$\frac{1}{32\pi^2}$	組合せ論（パフィアンの反対称化）
インスタントン数 k	$\frac{1}{16\pi^2}$	成分展開（ $F \wedge F$ を成分に書き下す・論文45）
θ 項	$\frac{g^2}{32\pi^2}$	生成子規格化（ $\text{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab}$ ）

三者の因子2は、三者三様の起源を持つ。

この分析は正しく、第3版でもそのまま保つ。体系が論文86で「祖先が同じことは根が同じことを意味しない」と書き、論文100で「共鳴は署名であって証明ではない」と書いた規律が、ここでは正しく働いている。

観察 6.1 (訂正するのは、土台の名だけである)

第2版はこう結んだ——「共通しているのは因子2ではなく、土台となる $(4\pi)^n$ の方である」。前半は正しい。後半を訂正する。前節までに見たとおり $(4\pi)^n$ は規約と組合せ論をまたいで括られた量であり、土台と呼べるものではない。三者に共通しているのは、特性類の規格化に現れる (2π) である。オイラー類の $\frac{1}{(2\pi)^n}$ 、第2チャーン類の規格化、 θ 項の書き方——いずれも「周期を整数にする」という同じ目的の 2π を持つ。その上に、それぞれ別の起源の因子が乗っている。これは訂正であって、撤回ではない。共通の土台があるという第2版の直観は正しく、その土台の名前が一段深いところにあった。

7. 射程の書き直し

項目	何であるか
規格化定数 = $(2\pi)^n(2^n n!)$	事実 ($n = 1, 2, 3, 4$ で確認)
$2D\ 4\pi \cdot 4D\ 32\pi^2 \cdot 6D\ 384\pi^3$	事実 (値は変更なし)
2次元での古典ガウス＝ボネとの整合	事実 ($R = 2K$ 経由・再確認)
$32\pi^2$ の因子2が $n!$ であること	確定 (第2版・変更なし)
$2^n n!$ が一つの塊であること	パフィアンの定義
$(2\pi)^n$	規約 (周期を整数にする規格化)
$(4\pi)^n$ という括り方	撤回 (塊をまたいで作られている)
その 4π が立体角であること	撤回 (規約 × 組合せ論・論文45・46)
三つの因子2の起源が別であること	確定 (第2版・変更なし)
共通の土台が $(4\pi)^n$ であること	訂正 (正しくは (2π))
バッファ二重化・ $SU(2)$ 次元・二重被覆	撤回済 (第2版・復活しない)

8. 結び

第2版は $32\pi^2$ の因子2を追いかけ、パフィアンの $n!$ に行き着いた。正しかった。

だが、その隣にもう一つ同じ出所の因子が座っていた。パフィアンの分母は $2^n n!$ であり、 $n!$ がペアの並べ替えを、 2^n が各ペア内の入れ替えを数えている。一つの勘定である。

第2版はそこから 2^n を取り出し、規格化の $(2\pi)^n$ に貼り付けて $(4\pi)^n$ を作った。数は合う。だが 4π は、そこにあった量ではない。

因子2の出所を突き止めたのに、
その隣の 2^n が同じ場所から来ていることに気づかなかった。

示さないこと（禁欲）： 2^n を $n!$ から切り離さない（同じパフィアンの分母・論文13・14と同型）／ $(4\pi)^n$ の 4π を立体角と呼ばない（規約×組合せ論・論文45・46）／因子2の三つの起源を統合しない（第2版の判定を保つ・論文86・100）／初版のバッファ二重化と論文32の $SU(2)$ 次元／二重被覆を復活させない（第2版で撤回済）／オイラー標数について新しい定理を主張しない／ガウス＝ボネ項が4次元で運動方程式に寄与しないという標準的事実を超えて解釈しない／宇宙OSのレンズを本文に置かない（第3層・非科学の札つきで隔離）／新しい数学も予言もない（第2層）。

改訂記録

第3版（2026年8月）：値も、因子2の確定も変更していない——2次元 4π 、4次元 $32\pi^2$ 、6次元 $384\pi^3$ 、そして $32\pi^2$ の因子2がパフィアン反対称化の $n!$ であるという第2版の確定はそのまま成り立つ。初版の「バッファ二重化」と論文32の「 $SU(2)$ 次元／二重被覆」も、撤回されたまま復活させない。(i) 規格化定数の切れ目を正しい場所に置き直した——導出は $e(TM) = \frac{1}{(2\pi)^n} \text{Pf}(\Omega)$ 、 $\text{Pf}(\Omega) = \frac{1}{2^n n!} \epsilon \Omega \cdots \Omega$ であるから、規格化定数は $(2\pi)^n \times (2^n n!)$ である（ $n = 1, 2, 3, 4$ で確認）。(ii) $2^n n!$ が一つの塊であることを明示した—— $n!$ がペアの並べ替え、 2^n が各ペア内の入れ替えを数えており、両者はパフィアンの同じ分母である。第2版は $n!$ を組合せ論に帰しながら 2^n を規格化の側に渡しており、自分の発見と整合していなかった。(iii) $(4\pi)^n$ という括り方を撤回した——それは規約（ $(2\pi)^n$ ）と組合せ論（ 2^n ）をまたいで作られた量であり、そこに現れる 4π は立体角ではない（論文45が面積を、論文46がループ因子の平方根を立体角と呼んでいたのと同型）。(iv) 第4節の「共通しているのは土台となる $(4\pi)^n$ である」を「共通しているのは特性類の規格化に現れる (2π) である」に訂正した。因子2が三者三様であるという判定そのものは正しく、変更しない。(v) 宇宙OSのレンズを本文から外した（第3層）。

参考文献

1. Chern, S.-S. (1944). *A Simple Intrinsic Proof of the Gauss--Bonnet Formula for Closed Riemannian Manifolds*. *Annals of Mathematics* 45, 747--752.
2. Chern, S.-S. (1945). *On the Curvatura Integra in a Riemannian Manifold*. *Annals of Mathematics* 46, 674--684.
3. Eguchi, T., Gilkey, P. B. & Hanson, A. J. (1980). *Gravitation, Gauge Theories and Differential Geometry*. *Physics Reports* 66, 213--393.
4. Nakahara, M. (2003). *Geometry, Topology and Physics*, 2nd ed. IOP Publishing. (オイラー類とパフイアン)
5. Yamagishi, Y. (2026). *An Area Is Not a Solid Angle* [論文45]、第3版. Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.21602337>
6. Yamagishi, Y. (2026). *Of $16\pi^2$, Only $\Omega_3 = 2\pi^2$ Is Geometry* [論文46]、第3版. Zenodo. [10.5281/zenodo.21602422](https://doi.org/10.5281/zenodo.21602422)
7. Yamagishi, Y. (2026). *The Power of 4π Is the Mass Dimension* [論文44]、第3版. Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.21602231>
8. Yamagishi, Y. (2026). *Convention and Fact* [論文95]. Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.21758621>
9. Yamagishi, Y. (2026). *Roots of Necessity* [論文86]. Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.21744839>
10. Yamagishi, Y. (2026). *Royal-Roads Census* [論文100]. Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.21758864>
11. Yamagishi, Y. (2026). *Two 4π in $4\pi G$* [論文35]、第3版. Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.21430118>
12. Yamagishi, Y. (2026). *The Switch Survives, Not Its Ends* [論文14]、第3版. Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.21600268>

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)