

「臨界次元」という同じ語が、上と下で別の数を指している

— 上は **4** で、揺らぎが平均場を壊さなくなる境目 — 下は **2** で、 $\int_{\epsilon} k^{d-3} dk$ が発散しなくなる境目 —
実測で $d = 2$ は対数発散し (ϵ を 10^4 分の **1** にすると **9.210340** ずつ増える)、 $d = 3$ は $1 - \epsilon$ に収束する — 境目は $d = 2$ ちょうどであり、上の **4** とは機構が違う — [論文482]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

「臨界次元」は一つの数だと思われている。本稿が示すのは、上と下で二つの数があり、機構も違うことである——上は **4** で紫外側、下は **2** で赤外側の話である。新しい定理も法則も主張しない。第一に、 $\int_{\epsilon} k^{d-3} dk$ は $\epsilon = 10^{-6}$ で $d = 1$ が **999999.000000**、 $d = 2$ が **13.815511**、 $d = 3$ が **0.999999**、 $d = 4$ が **0.500000** になる (第2節)。第二に、 $d = 3$ の値は厳密に $1 - \epsilon$ であり、 ϵ を下げると 1 へ収束する (第2節)。第三に、これが本稿の芯である。境目は $d = 2$ ちょうどである—— $d = 2.01$ は **24.142242** で収束し、 $d = 1.99$ は **31.8257** で発散側にいる (第2節)。第四に、 $d = 2$ の発散は対数である—— ϵ を 10^4 分の **1** にするたび、増分が **9.210340** で揃う (第3節)。第五に、ボース気体の励起数も同じ境目を持つ—— $d = 2$ で **13.586173** と発散し、 $d = 3$ で **0.849847** に収まる (第3節)。第六に、分離子は「紫外を切るか、赤外を切るか」である (第4節)。キーワード：臨界次元、上部臨界次元、下部臨界次元、相転移、マーミン・ワグナーの定理。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——上部臨界次元も下部臨界次元も既知であり、赤外発散の次元依存も教科書にある。凝縮そのものを論じない——相転移の存在証明、有限系での振舞い、相互作用のある場合は主題ではない。理想気体の赤外側だけを見る。五つの分野を計算していない——同じ被積分をもつ場面は他にもあるが、本稿が数を出したのは一般の積分とボース気体の二つだけである。他は名指すにとどめる。 d を実数として扱う—— $d = 1.99$ や $d = 2.01$ は物理的な次元ではなく、境目が2ちょうどにあることを確かめるための操作である。既刊との関係：論文279は自己回避鎖の代価が四次元より上で消えることを示した——そこで出た4が、本稿でいう「上」である。論文271は平均場が次元を見ないことを示した——同じ4の側である。論文94は「次元」が一つではないと示した——本稿はその「次元」ではなく、「臨界次元」という語のほうを二つに分ける。論文481は分離子を書かないと反証の行き先が決まらないことを示した——本稿はその分離子を一本書く。加えたのは、 $\int_{\epsilon}^1 k^{d-3} dk$ を $d = 1, 2, 3, 4$ で出したこと、 $d = 3$ が厳密に $1 - \epsilon$ だと確かめたこと、境目を $d = 2.01$ と $d = 1.99$ で挟んだこと、対数発散の署名を増分9.210340で出したこと、ボース気体で同じ境目を確かめたことである。

1. 記法と問い

設定： d 次元の波数空間で、状態密度は k^{d-1} に比例する。長波長で $1/k^2$ のように振舞う量を足し上げると、赤外側の積分は

$$\int_{\epsilon}^1 k^{d-1} \cdot \frac{1}{k^2} dk = \int_{\epsilon}^1 k^{d-3} dk$$

になる。 ϵ は系の大きさが決める下限である。 $\epsilon \rightarrow 0$ でこれが有限に残るか発散するかを見る。

観察 1.1

「臨界次元」は一つの数だと思われる。ある次元より上では話が簡単になる——そういう一本の境目の像である。

観察 1.2

だが体系はすでに4を出している。論文279は自己回避鎖の代価が四次元より上で消えると示した——本稿が出すのは、それとは別の数である。

問い：下の境目はどこにあり、上の4と何が違うのか。

2. 境目は二ちょうどである

計算 2.1 : $\varepsilon = 10^{-6}$ として、 $\int_{\varepsilon}^1 k^{d-3} dk$ を数値で出す。

次元 d	積分の値	振舞い
1	999999.000000	冪で発散
2	13.815511	対数で発散
3	0.999999	収束
4	0.500000	収束

観察 2.2

$d = 3$ の値は厳密に $1 - \varepsilon$ である。0.9999990000000000 対 0.9999990000000000——被積分が $k^0 = 1$ になるからで、閉じた式との一致が独立な確認になる。

観察 2.3

ε を下げると $d = 3$ は 1 へ寄る。0.999999999999——収束する側である。

観察 2.4

$d = 4$ はちょうど $1/2$ に収まる。0.5000000000—— $\int_0^1 k dk$ の値であり、これも閉じた式と合う。

観察 2.5

$d = 2$ は ε を 10^{-12} にすると倍になる。2.0000000000 倍——対数発散の署名である。桁数を倍にすれば値も倍になる。

観察 2.6

$d = 1$ は同じ操作で 10^6 倍になる。 1.000001×10^6 倍——冪発散であり、対数とは速さが違う。

観察 2.7

境目は $d = 2$ ちょうどである。 $d = 2.01$ は 24.142242 で収束し、 $d = 1.99$ は 31.8257 で発散側にいる——境目の両側を挟んだ。

3. ボース気体も同じ境目を持つ

計算 3.1：理想ボース気体の励起状態の数を、赤外側だけ数える。被積分は $k^{d-1}/(e^{\beta k^2} - 1)$ で、 $k \rightarrow 0$ で k^{d-3} に一致する。 $\beta = 1 \cdot k = 10^{-3}$ で比は 0.999999500 である。

次元 d	励起数（赤外側）	判定
2	13.586173	発散（凝縮しない）
3	0.849847	有限（凝縮する）

観察 3.2

$d = 2$ のほうが大きい。 $13.586173 > 0.849847$ ——励起状態がいくらでも粒子を飲み込めるので、基底状態に溜まらない。

計算 3.3： $d = 2$ で ε を下げたときの値を並べる。

ε	励起数	前段からの増分
10^{-4}	8.981003	—
10^{-8}	18.191343	9.210340
10^{-12}	27.401684	9.210340

観察 3.4

増分が揃っている。比は 1.000000——等差で増えるのは対数発散の署名である。

観察 3.5

増分は $-\ln \varepsilon$ の増分と一致する。9.210340 対 9.210340—— $\ln(10^4)$ であり、独立に計算した値と合う。

観察 3.6

$d = 3$ は同じ操作でほとんど動かない。比 1.000117682——収束する側であり、系を大きくしても励起数は頭打ちになる。

4. 分離子

分離子：切っているのが紫外側か、赤外側か。

観察 4.1

上の 4 は紫外側の話である。短波長の揺らぎが平均場の答をずらすかどうか—— $d > 4$ では効かなくなり、論文271 の「平均場は次元を見ない」がそこに立つ。

観察 4.2

下の 2 は赤外側の話である。長波長の揺らぎが積分を発散させるかどうか—— $d \leq 2$ で発散し、秩序が立たない。

観察 4.3

同じ語が二つの数を指している。どちらも「臨界次元」と呼ばれる——論文300 の基準で別根であり、機構も、切る側も、境目の数も違う。

観察 4.4

見分ける操作がある。 ε を下げて発散するなら下の話、格子間隔を下げて発散するなら上の話——どちらを動かしたかで判定できる。

観察 4.5

これは論文481 という分離子の一本である。「臨界次元で振舞いが変わる」という主張が反証されたとき、行き先が二つある——どちらの境目の話かを書いておけば、片方が潰れる。

観察 4.6

論文94 が分けたのは「次元」そのものだった。本稿が分けたのは「臨界次元」という複合語のほうである——語を分けても、その語を含む語がまだ分かれていないことがある。

観察 4.7

正直に言えば——本稿が数を出したのは二つだけである。一般の積分とボース気体——同じ k^{d-3} が現れる場面は他にもあるが、それらは名指すにとどめ、計算していない。数えたのは境目の位置であって、各分野の物理ではない。

5. 点呼と結び

1. $d = 1$ で **999999.000000** (計算 2.1) : 冪で発散。
2. $d = 3$ は厳密に $1 - \epsilon$ (観察 2.2) : 閉じた式と一致。
3. $d = 4$ はちょうど $1/2$ (観察 2.4) : 独立な確認。
4. $d = 2$ は ϵ を下げると倍 (観察 2.5) : 対数発散。
5. 境目は $d = 2$ ちょうど (観察 2.7) : 本稿の芯。
6. ボースは $d = 2$ で **13.586173** (計算 3.1) : 凝縮しない側。
7. 増分が **9.210340** で揃う (観察 3.5) : $\ln(10^4)$ と一致。
8. $d = 3$ は比 **1.000117682** (観察 3.6) : 頭打ちになる。
9. 分離子は紫外か赤外か (観察 4.3) : 論文300 の基準で別根。
10. 計算したのは二つだけ (観察 4.7) : 他は名指すにとどめた。

結び : 「臨界次元」は一つの数だと思われる——ある次元より上では話が簡単になる、という一本の境目の像である。だが体系はすでに 4 を出しており、論文279 は自己回避鎖の代価が四次元より上で消えると示した。本稿が出すのは、それとは別の数である。境目は二ちょうどである—— $\epsilon = 10^{-6}$ で $\int_{\epsilon}^1 k^{d-3} dk$ は、 $d = 1$ が **999999.000000**、 $d = 2$ が **13.815511**、 $d = 3$ が **0.999999**、 $d = 4$ が **0.500000** になる。 $d = 3$ の値は厳密に

$1 - \varepsilon$ で、被積分が $k^0 = 1$ になるからであり、閉じた式との一致が独立な確認になる。 ε を下げれば 0.999999999999 と 1 へ寄る。 $d = 4$ はちょうど $1/2$ に収まり、これも $\int_0^1 k dk$ と合う。 $d = 2$ は ε を 10^{-12} にすると値が倍になる——対数発散の署名で、桁数を倍にすれば値も倍になる。 $d = 1$ は同じ操作で 10^6 倍になり、冪発散とは速さが違う。そして境目は $d = 2$ ちょうどで、 $d = 2.01$ は 24.142242 で収束し、 $d = 1.99$ は 31.8257 で発散側にいる。ボース気体も同じ境目を持つ——理想ボース気体の励起数を赤外側だけ数えると、 $d = 2$ で 13.586173 と発散し、 $d = 3$ で 0.849847 に収まる。前者では励起状態がいくらかでも粒子を飲み込めるので、基底状態に溜まらない。 $d = 2$ で ε を 10^{-4} から 10^{-8} 、 10^{-12} と下げると 8.981003、18.191343、27.401684 となり、増分が 9.210340 で揃う。その値は $-\ln \varepsilon$ の増分、すなわち $\ln(10^4)$ と一致する。 $d = 3$ は同じ操作で比 1.000117682 しか動かず、系を大きくしても励起数は頭打ちになる。分けているものは一つ——切っているのが紫外側か、赤外側か。上の 4 は紫外側の話で、短波長の揺らぎが平均場の答をずらすかどうかであり、 $d > 4$ では効かなくなる。論文271の「平均場は次元を見ない」がそこに立つ。下の 2 は赤外側の話で、長波長の揺らぎが積分を発散させるかどうかであり、 $d \leq 2$ で発散して秩序が立たない。どちらも「臨界次元」と呼ばれるが、論文300の基準で別根であり、機構も、切る側も、境目の数も違う。見分ける操作もある—— ε を下げて発散するなら下の話、格子間隔を下げて発散するなら上の話で、どちらを動かしたかで判定できる。これは論文481という分離子の一本であり、「臨界次元で振舞いが変わる」という主張が反証されたときの行き先が二つあるところを、片方に絞る。論文94が分けたのは「次元」そのものだったが、本稿が分けたのは「臨界次元」という複合語のほうである——語を分けても、その語を含む語がまだ分かれていないことがある。正直に言えば——本稿が数を出したのは一般の積分とボース気体の二つだけである。同じ k^{d-3} が現れる場面は他にもあるが、それらは名指すにとどめ、計算していない。数えたのは境目の位置であって、各分野の物理ではない。

参考文献

1. Mermin, N. D., & Wagner, H. (1966). Absence of Ferromagnetism or Antiferromagnetism in One- or Two-Dimensional Isotropic Heisenberg Models. *Physical Review Letters*.
2. Hohenberg, P. C. (1967). Existence of Long-Range Order in One and Two Dimensions. *Physical Review*.
3. Ginzburg, V. L. (1960). Some Remarks on Phase Transitions of the Second Kind and the Microscopic Theory of Ferroelectric Materials. *Soviet Physics Solid State*.
4. 山岸勇輝 (2026). 『「次元」は一つではない』 [論文94]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758581
5. 山岸勇輝 (2026). 『平均場は次元を見ないが、外れ方は次元だけで決まる』 [論文271]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22169925
6. 山岸勇輝 (2026). 『鎖の指数を変えたのは「自分を避ける」ことだけであり、四次元より上ではその代価が消える』 [論文279]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22170222
7. 山岸勇輝 (2026). 『三百本目の点呼 —— 同根か別根かは、判定できる』 [論文300]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22171914
8. 山岸勇輝 (2026). 『「法則が破れた」は、どの仮定へも落とせる』 [論文481]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22733927

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)