

等時であることから曲線を逆に決めると、残るのは一つだけである

— 落下時間 $T(h)$ を与えて曲線を解く向きに立つと、 T が h に依らないという要求から $f'(y) \propto 1/\sqrt{y}$ が一意に出る — 実測で $T(0.5) = T(1) = T(2) = 0.708762$ 、幅は 0.000×10^0 で、閉じた式 $\pi/\sqrt{2g} = 0.709373$ に合う — 一般の f' では $T \propto \sqrt{h}$ で、 h を 4 倍にすると T が 2.000000 倍になる — [論文488]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

サイクロイドが等時なのは、その曲線の幸運な性質だと思われる。本稿が示すのは、向きを逆にすると等時性が曲線を一意に決めることである—— T が h に依らないという要求だけから $f'(y) \propto 1/\sqrt{y}$ が出る。新しい定理も法則も主張しない。第一に、サイクロイドでは出発角 0.2 から 2.5 まで落下時間が 1.003039 から 1.002780 秒に収まる——閉じた式 $\pi\sqrt{a/g} = 1.003204646$ 秒に合う（第2節）。第二に、対照の円弧では 1.338137 秒 対 0.363064 秒と 3.6857 倍動く——ばらつきは 0.000258 対 2.685675 である（第2節）。第三に、アーベル変換の数値が閉じた式に相対差 6.763×10^{-4} で一致する（第3節）。第四に、一般の曲線では $T \propto \sqrt{h}$ で、 h を 4 倍にすると T が 2.000000 倍になる（第3節）。第五に、これが本稿の芯である。 $f'(y) = 1/\sqrt{y}$ と置くと $T(0.5) = T(1) = T(2) = 0.708762$ 、幅 0.000×10^0 になる（第4節）。第六に、分離子は「曲線から時間を出すか、時間から曲線を出すか」である（第4節）。キーワード：等時曲線、サイクロイド、アーベルの積分方程式、逆問題、振り子時計。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——アーベルの積分方程式も、サイクロイドの等時性も、その逆問題としての解も標準的である。等時性そのものを主題にしない——サイクロイドが等時で円弧が等時でないことは論文396が扱っており、本稿はそれを出発点として借りる。時計を設計しない——脱進機、温度補償、摩擦は入れない。摩擦のない質点の滑降だけを見る。一意性を証明しない——アーベル変換が単射であることの厳密な証明には立ち入らない。要求から f' が出ることを数値で示すにとどめる。曲線を復元しない—— $f'(y)$ の形までを出し、そこから $x(y)$ を積分してサイクロイドの径数表示に戻す作業はしていない。既刊との関係：論文396は振り子の「小さい角」を数にし、円弧が等時でないこととサイクロイド振り子が全振幅で等時であることを示した——本稿はその二つを、逆向きの問題の入口として使う。論文487は停留点が三通りあることを示した——そこでも「原理が形を決めていない」ことが芯だった。本稿は逆に、要求が形を決める場合である。論文300は同根か別根かが判定できると示した——順問題と逆問題は別根である。論文481は分離子が無いと反証の行き先が決まらなると示した——本稿はその分離子を一本書く。加えたのは、サイクロイドの等時性を四つの出発角で 1.003039 から 1.002780 秒と測ったこと、円弧の比 3.6857 を対照として出したこと、アーベル変換の数値と閉じた式を相対差 6.763×10^{-4} で突き合わせたこと、 $T \propto \sqrt{h}$ を 2.000000 倍で確かめたこと、等時性の要求から $f'(y) = 1/\sqrt{y}$ を出し、幅 0.000×10^0 を確かめたことである。

1. 記法と問い

設定：摩擦のない曲線に沿って、高さ h から静かに滑らせる。高さ y での弧長を $s = f(y)$ と書くと、落下時間は

$$T(h) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^h \frac{f'(y)}{\sqrt{h-y}} dy$$

になる。これがアーベルの積分方程式である。 f を与えて T を出すのが順、 T を与えて f を出すのが逆である。

観察 1.1

サイクロイドが等時なのは、その曲線の幸運な性質だと思われる。調べてみたら等時だった——曲線が先にあって、性質が後から見つかった、という像である。

観察 1.2

だが式は逆にも読める。 T を与えて f を解く——そのとき等時性は、性質ではなく要求になる。

問い：等時であれという要求だけから、曲線は決まるのか。

2. 順に見る

計算 2.1：サイクロイド（ $a = 1$ ）で、出発角を変えて落下時間を測る。

出発角	落下時間（秒）	理論との差
0.2	1.003039	1.659×10^{-4}
0.8	1.002901	3.039×10^{-4}
1.5	1.002827	3.777×10^{-4}
2.5	1.002780	4.244×10^{-4}

観察 2.2

出発点を変えても落下時間が変わらない。1.003039 対 1.002780——差は 2.6×10^{-4} 秒で、出発角を 12 倍にしたのに動いていない。

観察 2.3

値が閉じた式に合う。 $\pi\sqrt{a/g} = 1.003204646$ 秒——独立な確認である。

計算 2.4：対照として円弧で同じことをする。

出発角	落下時間（秒）
0.05	1.338137
1.0	0.363064
比	3.6857

観察 2.5

円弧では出発点で落下時間が変わる。3.6857 倍——ばらつきで比べると 0.000258 対 2.685675 で、四桁違う。

観察 2.6

ここまでは論文396 が示した通りである。同じ重力の下で、円弧なら等時でなくサイクロイドなら等時——本稿はここを出発点にする。

3. アーベル変換を確かめる

計算 3.1： f' を与えて $T(h)$ を数値で出し、閉じた式と比べる。

h	数値	閉じた式	相対差
0.5	0.319114	0.319330	6.763×10^{-4}
1.0	0.451295	0.451601	6.763×10^{-4}
2.0	0.638228	0.638660	6.763×10^{-4}

観察 3.2

相対差が三つとも同じである。 6.763×10^{-4} —— h に依らない一定のずれで、これは求積法が端点の特異性を刻む際の系統的な偏りであって、物理ではない。

観察 3.3

T は $\sqrt{h}$ に比例する。 h を 4 倍にすると T が 2.000000 倍——0.319114 から 0.638228 で、指数が $1/2$ であることの確認になる。

観察 3.4

だからこの f' では等時にならない。高いところから落とせば時間がかかる——ほとんどの曲線がこちら側である。

4. 逆に解くと、一つに決まる

計算 4.1 : T が h に依らないことを要求し、 $f'(y) = 1/\sqrt{y}$ と置いて確かめる。

h	$T(h)$
0.5	0.708762
1.0	0.708762
2.0	0.708762
幅	0.000×10^0

観察 4.2

T が h に依らなくなる。幅 0.000×10^0 ——丸めの範囲ですらなく、桁が一つも動いていない。

観察 4.3

値が閉じた式に合う。 0.708762 対 $\pi/\sqrt{2g} = 0.709373$ ——独立な確認であり、 0.09 パーセントの差は観察 3.2 と同じ求積の偏りである。

観察 4.4

そしてこの f' がサイクロイドである。弧長が $\sqrt{y}$ に比例する曲線——等時であれという要求から、曲線が出てきた。

分離子：曲線から時間を出すか、時間から曲線を出すか。

観察 4.5

順なら、等時性は性質である。サイクロイドを調べたら等時だった——他にもあるかどうかは分からない。

観察 4.6

逆なら、等時性は要求である。 T が定数だと置くと f' が決まる——他に無いことまで含めて出る。

観察 4.7

二つは論文300 の基準で別根である。どちらも「サイクロイドは等時である」と言える——一方は一つの曲線についての事実、一方は曲線全体の集合についての言明である。

観察 4.8

論文487 とは向きが逆である。あちらは原理が形を決めていなかった——停留という要求からは最小も最大も縮退も出た。こちらは等時という要求から一つしか出ない。要求が形を決めるかどうかは、要求ごとに違う。

観察 4.9

正直に言えば——一意性を証明してはいない。 $f'(y) = 1/\sqrt{y}$ が要求を満たすことを数値で確かめただけ——他に満たすものが無いことは、アーベル変換が単射であるという既知の事実に頼っており、本稿はそこを再現していない。

5. 点呼と結び

1. サイクロイドで 1.003039 から 1.002780 秒（計算 2.1）：出発角 12 倍で動かない。
2. $\pi\sqrt{a/g} = 1.003204646$ 秒（観察 2.3）：独立な確認。
3. 円弧では比 3.6857（計算 2.4）：ばらつきは四桁違う。
4. 相対差が三つとも 6.763×10^{-4} （観察 3.2）：求積の偏りで、物理ではない。
5. h を 4 倍で T が 2.000000 倍（観察 3.3）：指数は $1/2$ 。
6. $f'(y) = 1/\sqrt{y}$ で幅 0.000×10^0 （計算 4.1）：本稿の芯。
7. 0.708762 対 $\pi/\sqrt{2g}$ （観察 4.3）：同じ偏りの範囲。
8. 分離子は順か逆か（観察 4.7）：論文300 の基準で別根。
9. 要求が形を決めるかは要求次第（観察 4.8）：論文487 とは逆向き。

10. 一意性は証明していない（観察 4.9）：既知の事実に頼った。

結び：サイクロイドが等時なのは、その曲線の幸運な性質だと思われている——曲線が先にあって、性質が後から見つかったという像である。だがアーベルの積分方程式は逆にも読める。 T を与えて f を解けば、等時性は性質ではなく要求になる。順に見る——サイクロイド ($a = 1$) では出発角 0.2 から 2.5 まで落下時間が **1.003039** 秒から **1.002780** 秒に収まり、出発角を 12 倍にしても差は 2.6×10^{-4} 秒しかない。その値は閉じた式 $\pi\sqrt{a/g} = 1.003204646$ 秒に合う。対照の円弧では出発角 0.05 で **1.338137** 秒、 1.0 で **0.363064** 秒と **3.6857** 倍動き、ばらつきで比べれば **0.000258** 対 **2.685675** と四桁違う。ここまでは論文396 が示した通りで、同じ重力の下で円弧なら等時でなくサイクロイドなら等時である。アーベル変換を確かめる—— f' を与えて $T(h)$ を数値で出すと、 $h = 0.5, 1.0, 2.0$ で **0.319114, 0.451295, 0.638228** となり、閉じた式との相対差は三つとも 6.763×10^{-4} で揃う。 h に依らない一定のずれであり、求積法が端点の特異性を刻む際の系統的な偏りであって、物理ではない。 T は $\sqrt{h}$ に比例し、 h を 4 倍にすると T が 2.000000 倍になる。だからこの f' では等時にならず、高いところから落とせば時間がかかる。ほとんどの曲線がこちら側である。逆に解くと、一つに決まる—— T が h に依らないことを要求して $f'(y) = 1/\sqrt{y}$ と置くと、 $T(0.5) = T(1) = T(2) = \mathbf{0.708762}$ 、幅は $\mathbf{0.000 \times 10^0}$ で、丸めの範囲ですらなく桁が一つも動かない。値は閉じた式 $\pi/\sqrt{2g} = 0.709373$ に合い、 0.09 パーセントの差は先ほどと同じ求積の偏りである。そしてこの f' 、すなわち弧長が $\sqrt{y}$ に比例する曲線がサイクロイドである。等時であれという要求から、曲線が出てきた。分けているものは一つ——曲線から時間を出すか、時間から曲線を出すか。順なら等時性は性質で、サイクロイドを調べたら等時だったというだけであり、他にもあるかどうかは分からない。逆なら等時性は要求で、 T が定数だと置けば f' が決まり、他に無いことまで含めて出る。二つは論文300 の基準で別根であり、どちらも「サイクロイドは等時である」と言えるが、一方は一つの曲線についての事実、一方は曲線全体の集合についての言明である。論文487 とは向きが逆で、あちらは停留という要求から最小も最大も縮退も出て、原理が形を決めていなかった。こちらは等時という要求から一つしか出ない。要求が形を決めるかどうかは、要求ごとに違う。正直に言えば——一意性を証明してはいない。 $f'(y) = 1/\sqrt{y}$ が要求を満たすことを数値で確かめただけで、他に満たすものが無いことはアーベル変換が単射であるという既知の事実に頼っており、本稿はそこを再現していない。

参考文献

1. Abel, N. H. (1826). Auflösung einer mechanischen Aufgabe. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*.
2. Huygens, C. (1673). *Horologium Oscillatorium*. F. Muguet, Paris.
3. Gorenflo, R., & Vessella, S. (1991). *Abel Integral Equations: Analysis and Applications*. Springer.
4. 山岸勇輝 (2026). 『三百本目の点呼 — 同根か別根かは、判定できる』 [論文300]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22171914
5. 山岸勇輝 (2026). 『振り子の「小さい角」を数にすると、**10** 度で一日 **164.78** 秒ずれる』 [論文396]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22699299
6. 山岸勇輝 (2026). 『「法則が破れた」は、どの仮定へも落とせる』 [論文481]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22733927

7. 山岸勇輝 (2026). 『停留点は三通りある —— 最小と、最大と、どこでも同じ』 [論文487]. Zenodo.
10.5281/zenodo.22759965

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)