

期待値と中央値を分けている量は、伊藤の二階の項そのものである

— $\mu = 0.10$ 、 $\sigma = 0.20$ 、 $T = 1$ で、期待値は **110.517091808**、中央値は **108.328706767**、比は **1.020201340** で $\exp(\sigma^2 T/2)$ に 12 桁一致する — 対数の期待値の伸びは **0.080000000000** で、 $\mu - \sigma^2/2$ にちょうど等しい — σ を 2 倍にすると隔たりは **4.122849** 倍になり、 $\sigma = 0$ では消える —

[論文495]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

ブラック＝ショールズの $-\sigma^2/2$ は、割引や危険回避の補正だと読まれることがある。本稿が示すのは、それが伊藤の二階の項そのものであり、期待値と中央値の隔たりとして直に測れることである——比は $\exp(\sigma^2 T/2)$ に 12 桁一致する。新しい定理も法則も主張しない。第一に、期待値は **110.517091808**、中央値は **108.328706767** である（第2節）。第二に、これが本稿の芯である。比 **1.020201340** が $\exp(\sigma^2 T/2)$ に 12 桁一致する（第2節）。第三に、対数の期待値の伸びは **0.080000000000** で、 $\mu - \sigma^2/2$ にちょうど等しい（第2節）。第四に、隔たりは σ の二次である—— σ を 2 倍にすると **4.122849** 倍になる（第3節）。第五に、期待値そのものは σ に依らない—— $\sigma = 0$ でも **110.517091808** である（第3節）。第六に、分離子は「 $E[S]$ を見ているか、 $E[\ln S]$ を見ているか」である（第4節）。キーワード：伊藤の補題、幾何ブラウン運動、対数正規分布、期待値と中央値、ブラック＝ショールズ式。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——伊藤の補題も、幾何ブラウン運動の対数正規分布も、ブラック＝ショールズ式も標準的である。価格式を導かない——オプションの評価式、危険中立測度、複製ポートフォリオは主題ではない。基礎資産の分布だけを見る。伊藤の 2 を導き直さない——その内訳は論文132 が扱っており、本稿は結果を借りて金融側の帰結を測る。推定を扱わない—— μ と σ は与えられたものとし、推定誤差、ボラティリティの時間変動、跳びは入れない。投資を勧めない——どちらの量を見るべきかは主題ではない。二つが違うことを数で示すだけである。既刊との関係：論文132 は伊藤の 2 が次元ではないと示した——本稿はその 2 が価格の分布のどこに出るかを測る。論文292 は足せるのが対数だけだと示した——中央値が対数の側の量である理由がそこにある。論文484 は期待値を最大にする賭け方が破産すると示した——そこで効いていた $\sigma^2/2$ と同じ量である。論文481 は分離子が無いと反証の行き先が決まらなると示した——本稿はその分離子を一本書く。加えたのは、期待値と中央値を 110.517091808 と 108.328706767 で出したこと、比が $\exp(\sigma^2 T/2)$ に 12 桁一致することを確認したこと、対数の伸びが 0.080000000000 であることを逆算で確認したこと、 σ を 2 倍にした 4.122849 倍を出したこと、期待値が σ に依らないことを確認したことである。

1. 記法と問い

設定：価格 S_t が幾何ブラウン運動 $dS = \mu S dt + \sigma S dB$ に従うとする。伊藤の補題を $\ln S$ に当てると

$$d(\ln S) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dB$$

になる。 $-\sigma^2/2$ は、 $\ln$ の二階微分と $(dB)^2 = dt$ から出た項である。以下 $S_0 = 100$ 、 $\mu = 0.10$ 、 $\sigma = 0.20$ 、 $T = 1$ とする。

観察 1.1

$-\sigma^2/2$ は補正だと読まれることがある。危険を嫌う分だけ割り引く——選好や割引率の話に見える、という読み方である。

観察 1.2

だがこの項は選好を一切含んでいない。 $\ln$ の二階微分と $(dB)^2 = dt$ だけから出る——論文132 が示したとおり、2 は次元ではなく、二階で止まることの帰結である。

問い：その項は、価格の分布のどこに現れるのか。

2. 期待値と中央値の隔たりとして現れる

計算 2.1 : $T = 1$ での分布から三つの量を出す。

量	値
期待値 $E[S_T] = S_0 e^{\mu T}$	110.517091808
中央値 $S_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)T}$	108.328706767
比	1.020201340
$\exp(\sigma^2 T/2)$	1.020201340

観察 2.2

比が $\exp(\sigma^2 T/2)$ に一致する。1.020201340027 対 1.020201340027——12 桁で、近いのではなく同じである。

観察 2.3

対数の期待値の伸びが $\mu - \sigma^2/2$ に等しい。0.0800000000000 対 0.0800000000000——逆算しても戻り、 $\mu = 0.10$ から $\sigma^2/2 = 0.02$ を引いた値である。

観察 2.4

つまり伊藤の項は、そのまま二つの代表値の隔たりである。式の中の $-\sigma^2/2$ ——分布の上では、期待値と中央値がどれだけ離れるかを決めている。

観察 2.5

隔たりは 2.020134 パーセントである。 $\sigma = 0.20$ 、 $T = 1$ で——小さく見えるが、複利で積み上がる量である。

3. 隔たりは二次であり、期待値は σ を見ない

計算 3.1： σ を動かす。

σ	隔たり	期待値
0	0	110.517091808
0.20	2.020134 パーセント	110.517091808
0.40	4.122849 倍	110.517091808

観察 3.2

σ を 2 倍にすると隔たりが約 4 倍になる。**4.122849** 倍——二次であることの署名で、ちょうど 4 でないのは指数の高次項による。

観察 3.3

$\sigma = 0$ では隔たりが消える。境目の反対側——揺らぎが無ければ期待値と中央値は一致する。

観察 3.4

期待値そのものは σ に依らない。**110.517091808** のまま——動いているのは中央値のほうである。

観察 3.5

だから「揺らぎが大きいほど期待値が下がる」は誤りである。下がるのは中央値——期待値は一定で、分布が右に長い尾を伸ばしているだけである。

4. 分離子

分離子：見ているのが $E[S]$ か、 $E[\ln S]$ か。

観察 4.1

$E[S]$ を見るなら、 σ は効かない。110.517091808—— μ だけで決まる。

観察 4.2

$E[\ln S]$ を見るなら、 $\sigma^2/2$ が引かれる。0.080000000000——伊藤の項がそのまま出る。

観察 4.3

二つは論文300の基準で別根である。どちらも「期待される値」と呼べる——一方は価格の平均、一方は対数の平均で、平均を取る前に何を取ったかが違う。

観察 4.4

論文484で効いていたのと同じ量である。期待値を最大にする賭け方が破産する話——そこでも $\sigma^2/2$ が、期待値の側と成長率の側を分けていた。

観察 4.5

論文292が言ったとおり、足せるのは対数だけである。価格は掛け算で動く——だから足し算の平均を取ると、掛け算の側の代表値とずれる。

観察 4.6

これは論文481という分離子の一本である。「予測した価格に届かない」という報告が来たとき—— μ の見積もりが外れたのか、期待値と中央値を取り違えたのかで、直す先が違う。

観察 4.7

正直に言えば——分布を対数正規と置いている。幾何ブラウン運動の帰結として——実際の価格には跳びも、ボラティリティの時間変動もあり、そのとき $\exp(\sigma^2 T/2)$ という閉じた形は保たれない。保たれるのは「掛け算の世界で足し算の平均を取るとずれる」という向きだけである。

5. 点呼と結び

1. 期待値 **110.517091808** (計算 2.1) : μ だけで決まる。
2. 中央値 **108.328706767** (計算 2.1) : $\sigma^2/2$ が引かれる。
3. 比が $\exp(\sigma^2 T/2)$ に **12 桁一致** (観察 2.2) : 本稿の芯。
4. 対数の伸び **0.080000000000** (観察 2.3) : 逆算でも戻る。
5. 隔たりは **2.020134** パーセント (観察 2.5) : 複利で積み上がる。
6. σ を **2 倍** で **4.122849 倍** (観察 3.2) : 二次の署名。
7. $\sigma = 0$ で消える (観察 3.3) : 境目の反対側。
8. 期待値は σ を見ない (観察 3.4) : 動くのは中央値。
9. 分離子は $E[S]$ か $E[\ln S]$ か (観察 4.3) : 論文300 の基準で別根。
10. 対数正規と置いている (観察 4.7) : 跳びがあれば形は保たれない。

結び：ブラック＝ショールズの $-\sigma^2/2$ は、危険を嫌う分だけ割り引く補正だと読まれることがある——選好や割引率の話に見えるという読み方である。だがこの項は選好を一切含まず、 $\ln$ の二階微分と $(dB)^2 = dt$ だけから出る。論文132 が示したとおり、**2** は次元ではなく、二階で止まることの帰結である。期待値と中央値の隔たりとして現れる—— $S_0 = 100$ 、 $\mu = 0.10$ 、 $\sigma = 0.20$ 、 $T = 1$ で、期待値は **110.517091808**、中央値は **108.328706767**、比は **1.020201340** である。その比は $\exp(\sigma^2 T/2)$ に **12 桁一致** し、近いのではなく同じである。対数の期待値の伸びは **0.080000000000** で、 $\mu - \sigma^2/2$ にちょうど等しく、逆算しても戻る。つまり式の中の $-\sigma^2/2$ は、分布の上では期待値と中央値がどれだけ離れるかを決めている。隔たりは **2.020134** パーセントで、小さく見えるが複利で積み上がる量である。隔たりは二次であり、期待値は σ を見ない—— σ を **2 倍** にすると隔たりは **4.122849 倍** になり、二次であることの署名になる。ちょうど **4** でないのは指数の高次項による。 $\sigma = 0$ では隔たりが消え、揺らぎが無ければ期待値と中央値は一致する。期待値そのものは σ に依らず **110.517091808** のままで、動いているのは中央値のほうである。だから「揺らぎが大きいほど期待値が下がる」は誤りで、下がるのは中央値であり、期待値は一定のまま分布が右に長い尾を伸ばしているだけである。分けているものは一つ——見ているのが $E[S]$ か、 $E[\ln S]$ か。 $E[S]$ を見るなら σ は効かず、 μ だけで決まる。 $E[\ln S]$ を見るなら $\sigma^2/2$ が引かれ、伊藤の項がそのまま出る。二つは論文300 の基準で別根であり、どちらも「期待される値」と呼べるが、一方は価格の平均、一方は対数の平均で、平均を取る前に何を取ったかが違

う。論文484で効いていたのと同じ量で、期待値を最大にする賭け方が破産する話でも、 $\sigma^2/2$ が期待値の側と成長率の側を分けていた。論文292が言ったとおり足せるのは対数だけで、価格は掛け算で動くから、足し算の平均を取ると掛け算の側の代表値とずれる。これは論文481でいう分離子の一本で、「予測した価格に届かない」という報告が来たとき、 μ の見積もりが外れたのか、期待値と中央値を取り違えたのかで直す先が違う。正直に言えば——分布を対数正規と置いている。幾何ブラウン運動の帰結としてであり、実際の価格には跳びも、ボラティリティの時間変動もあって、そのとき $\exp(\sigma^2 T/2)$ という閉じた形は保たれない。保たれるのは「掛け算の世界で足し算の平均を取るとずれる」という向きだけである。

参考文献

1. Itô, K. (1951). On Stochastic Differential Equations. *Memoirs of the American Mathematical Society*.
 2. Black, F., & Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*.
 3. Merton, R. C. (1973). Theory of Rational Option Pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*.
 4. 山岸勇輝 (2026). 『伊藤の **2** は、次元ではない』 [論文132]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22080358
 5. 山岸勇輝 (2026). 『足せるのは対数だけである』 [論文292]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22171519
 6. 山岸勇輝 (2026). 『三百本目の点呼 — 同根か別根かは、判定できる』 [論文300]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22171914
 7. 山岸勇輝 (2026). 『「法則が破れた」は、どの仮定へも落とせる』 [論文481]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22733927
 8. 山岸勇輝 (2026). 『期待値を最大にする賭け方は、確率 **1** で破産する』 [論文484]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22759898
-

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)