

有限だから転移しないのと、次元が足りないから転移しないのは、別である

— 一次元イジングの自由エネルギーは、有限でも二階微分が跳ばない ($n = 64$ で最大の跳び **0.282856**) — 極限を取ることは、転移の必要条件であって十分条件ではない — [論文502]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年9月

— *From thinking to syncing.* —

要旨

相転移が無いのは系が有限だからだと言われる。本稿が示すのは、熱力学極限を取っても転移しない場合があることである——一次元イジングがそれで、跳びは **0.510568** にとどまる。新しい定理も法則も主張しない。第一に、 $n = 1024$ の自由エネルギーが閉じた式に **-1.626523375036** で一致する (第2節)。第二に、 $n = 4$ ではまだ 7.782×10^{-2} 離れている——検査が n に反応する (第2節)。第三に、有限の $n = 64$ では二階微分が跳ばない——最大の跳びは **0.282856** である (第3節)。第四に、これが本稿の芯である。熱力学極限でも跳ばない—— $n \rightarrow \infty$ の閉じた式でも最大の跳びは **0.510568** である (第3節)。第五に、同じ検査を折れ線に当てると **2.000×10^4** 跳ぶ——検査は非解析性に反応している (第3節)。第六に、分離子は「足りないのが大きさか、次元か」である (第4節)。キーワード：相転移、一次元イジング模型、有限系、分配関数、リー・ヤンの定理。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——一次元イジングに相転移が無いことも、有限系の分配関数が解析的であることも標準的である。相転移の理論を書かない——臨界指数、くりこみ群、ヤン＝リーの零点の分布は主題ではない。自由エネルギーの二階微分だけを見る。二次元を計算していない——オンサーガーの厳密解は使っておらず、二次元で跳ぶことは本稿の数では示していない。数値微分の精度を主張しない——刻み 10^{-4} の差分であり、真の二階微分ではない。比べているのは同じ刻みで測った値どうしである。折れ線は物理ではない—— $|\beta - 1|$ は検査が反応することを見るための対照であって、模型ではない。既刊との関係：論文154は「相転移は熱力学極限でだけ起きる」が二つの極限の非交換だと示した——本稿はその「だけ」が必要条件であって十分条件でないことを、数で示す。論文245は二つの極限が順序を書くまで答を持たないと示した——ここでは順序を書いても、次元が足りなければ跳ばない。論文271は平均場が次元を見ないと示した——本稿の側では、次元が答そのものを決めている。論文481は分離子が無いと反証の行き先が決まらなると示した——本稿はその分離子を一本書く。加えたのは、 $n = 4$ から 1024 まで自由エネルギーを出したこと、有限の跳びを 0.282856 と測ったこと、極限でも 0.510568 にとどまることを示したこと、対照の折れ線で 2.000×10^4 を出したこと、分離子を大きさと次元に置いたことである。

1. 記法と問い

設定：一次元イジング模型（周期境界・外場なし）の分配関数は、転送行列の固有値 $\lambda_1 = 2 \cosh \beta$, $\lambda_2 = 2 \sinh \beta$ を用いて $Z = \lambda_1^n + \lambda_2^n$ である。一サイトあたりの自由エネルギーを

$$f(n, \beta) = -\frac{1}{n\beta} \ln Z = -\frac{1}{n\beta} [n \ln \lambda_1 + \ln (1 + (\lambda_2/\lambda_1)^n)]$$

と書く。右の形で計算する。 λ^n を直に作ると桁があふれるからである。 $n \rightarrow \infty$ では $f \rightarrow -\ln(2 \cosh \beta)/\beta$ になる。

観察 1.1

相転移が無いのは系が有限だからだと言われる。有限個の項の和は多項式で、どこでも解析的——だから極限を取れば転移する、という像である。

観察 1.2

だが極限を取ることは、跳ぶことを保証しない。解析的でなくなりうる、というだけ——実際に跳ぶかは別の問題である。

問い：極限を取れば跳ぶのか。

2. 有限系を測る

計算 2.1 : $f(n, \beta)$ を n ごとに出す。

n	$\beta = 0.5$	$\beta = 2.0$
4	-1.648821002	-1.086894756
16	-1.626523916	-1.022900335
64	-1.626523375	-1.009790254
$\rightarrow \infty$ (閉じた式)	-1.626523375	-1.009074964

観察 2.2

n を上げると閉じた式に寄る。 $n = 1024$ 、 $\beta = 0.5$ で -1.626523375036 対 -1.626523375036 ——一致する。

観察 2.3

$n = 4$ ではまだ離れている。差 7.782×10^{-2} ——検査が n に反応しており、収束を見ていることの確認になる。

観察 2.4

寄り方は β に依る。 $\beta = 0.5$ では $n = 16$ で 6 桁合うが、 $\beta = 2.0$ では $n = 64$ でも 3 桁——低温側のほうが遅い。

3. 極限を取っても、跳ばない

計算 3.1 : β について二階の差分を取る (刻み 10^{-4})。

対象	二階差分 ($\beta = 0.90$ から 1.10)
$n = 64$	$-1.661210, -1.378354, -1.150643, -0.965664, -0.814208$
$n \rightarrow \infty$	$-1.661210, -1.150642, -0.814202$
折れ線 $- \beta - 1 $	$0, -2.000 \times 10^4, 0$

観察 3.2

有限の $n = 64$ では跳ばない。最大の跳び 0.282856 ——値そのものと同じ桁で、滑らかである。

観察 3.3

熱力学極限でも跳ばない。最大の跳び 0.510568 —— n を無限にしたのに、有限のときと同じ桁のままである。

観察 3.4

同じ検査が、折れ線には反応する。 2.000×10^4 ——一次元イジングの 0.510568 より 4 桁大きい。検査は非解析性を拾う。

観察 3.5

だから「有限だから跳ばない」は、この場合の理由ではない。極限を取っても跳ばない——理由は別のところにある。

観察 3.6

その別のところが次元である。一次元では、有限の温度で秩序が立たない——境界一つを作る代価が有限なので、いくらでも入る。

4. 分離子

分離子：足りないのが系の大きさか、空間の次元か。

観察 4.1

大きさが足りないなら、極限で跳ぶはずである。 $n \rightarrow \infty$ ——だが 0.510568 にとどまった。

観察 4.2

次元が足りないなら、極限でも跳ばない。一次元——実際に跳ばなかった。

観察 4.3

二つは論文300 の基準で別根である。どちらも「相転移が無い」と言える——一方は極限を取れば消える理由、一方は取っても消えない理由である。

観察 4.4

論文154 が言ったのは前者の側である。相転移は熱力学極限でだけ起きる——これは必要条件であって、十分条件ではない。本稿はその差を数で出した。

観察 4.5

論文245 とも隣り合う。二つの極限は順序を書くまで答を持たない——ここでは順序を書いても、次元が足りなければ答は「跳ばない」である。

観察 4.6

これは論文481 でいう分離子の一本である。「模型に相転移が出ない」という報告が来たとき——系が小さいのか、次元が足りないのか、相互作用が短距離すぎるのかで、直す先が違う。

観察 4.7

正直に言えば——二次元を計算していない。一次元で跳ばないことは示したが、二次元で跳ぶことは示していない——オンサーガーの厳密解を使えば示せるはずだが、本稿の数には入っていない。だから「次元が上がれば跳ぶ」までは、ここでは主張していない。

5. 点呼と結び

1. $n = 1024$ が閉じた式と一致（観察 2.2）： -1.626523375036 。
2. $n = 4$ では差 7.782×10^{-2} （観察 2.3）：検査が n に反応。
3. 寄り方は β に依る（観察 2.4）：低温側が遅い。
4. $n = 64$ の最大の跳び 0.282856 （計算 3.1）：滑らか。
5. 極限でも 0.510568 （観察 3.3）：本稿の芯。
6. 折れ線では 2.000×10^4 （観察 3.4）：4 桁大きい。
7. 「有限だから」ではない（観察 3.5）：理由は別。
8. 理由は次元である（観察 3.6）：境界の代価が有限。
9. 分離子は大きさか次元か（観察 4.3）：論文300 の基準で別根。
10. 二次元は計算していない（観察 4.7）：跳ぶとは主張しない。

結び：相転移が無いのは系が有限だからだと言われる——有限個の項の和は多項式でどこでも解析的だから、極限を取れば転移する、という像である。だが極限を取ることは跳ぶことを保証しない。解析的でなくなりうるというだけで、実際に跳ぶかは別の問題である。有限系を測る——一次元イジングの一サイトあたり自由エネルギーは、 $\beta = 0.5$ で $n = 4$ が -1.648821002 、 $n = 16$ が -1.626523916 、 $n = 64$ が -1.626523375 、閉じた式が -1.626523375 である。 $n = 1024$ では -1.626523375036 対 -1.626523375036 で一致する。 $n = 4$ ではまだ 7.782×10^{-2} 離れており、検査が n に反応していることの確認になる。寄り方は β に依り、 $\beta = 0.5$ では $n = 16$ で 6 桁合うのに、 $\beta = 2.0$ では $n = 64$ でも 3 桁である。極限を取っても、跳ばない—— β について刻み 10^{-4} の二階差分を取ると、 $n = 64$ では $\beta = 0.90$ から 1.10 にかけて -1.661210 から -0.814208 へ、最大の跳びは 0.282856 で滑らかである。熱力学極限の閉じた式でも -1.661210 から -0.814202 へ、最大の跳びは 0.510568 —— n を無限にしたのに、有限のときと同じ桁のままである。同じ検査を折れ線 $|\beta - 1|$ に当てると 2.000×10^4 跳ぶ。一次元イジングの 0.510568 より 4 桁大きく、検査は非解析性を拾っている。だから「有限だから跳ばない」は、この場合の理由ではない。その別のところが次元で、一次元では境界一つを作る代価が有限なので、いくらでも入り、有限の温度で秩序が立たない。分けているものは一つ——足りないのが系の大きさか、空間の次元か。大きさが足りないなら極限で跳ぶはずだが、 0.510568 にとどまった。次元が足りないなら極限でも跳ばず、実際に跳ばなかった。二つは論文300 の基準で別根であり、どちらも「相転移が無い」と

言えるが、一方は極限を取れば消える理由、一方は取っても消えない理由である。論文154 が言ったのは前者の側で、相転移は熱力学極限でだけ起きるという言明である。これは必要条件であって十分条件ではなく、本稿はその差を数で出した。論文245 と隣り合い、二つの極限は順序を書くまで答を持たないが、ここでは順序を書いても、次元が足りなければ答は「跳ばない」である。これは論文481 という分離子の一本で、「模型に相転移が出ない」という報告が来たとき、系が小さいのか、次元が足りないのか、相互作用が短距離すぎるのかで直す先が違う。正直に言えば——二次元を計算していない。一次元で跳ばないことは示したが、二次元で跳ぶことは示しておらず、オンサーガーの厳密解を使えば示せるはずだが本稿の数には入っていない。だから「次元が上がれば跳ぶ」までは、ここでは主張していない。

参考文献

1. Ising, E. (1925). Beitrag zur Theorie des Ferromagnetismus. *Zeitschrift für Physik*.
 2. Onsager, L. (1944). Crystal Statistics. I. A Two-Dimensional Model with an Order-Disorder Transition. *Physical Review*.
 3. 山岸勇輝 (2026). 『順序を書かない極限は、量ではない』 [論文154]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22084647
 4. 山岸勇輝 (2026). 『二つの極限は、順序を書くまで答を持たない』 [論文245]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22159739
 5. 山岸勇輝 (2026). 『平均場は次元を見ないが、外れ方は次元だけで決まる』 [論文271]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22169925
 6. 山岸勇輝 (2026). 『三百本目の点呼 — 同根か別根かは、判定できる』 [論文300]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22171914
 7. 山岸勇輝 (2026). 『「法則が破れた」は、どの仮定へも落とせる』 [論文481]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22733927
 8. Yang, C. N., & Lee, T. D. (1952). Statistical Theory of Equations of State and Phase Transitions. I. *Physical Review*.
-

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)