

三つの別々の答は、どれも「接する」ところで決まっている

— ルジャンドル変換の接点は $f'(x) = p$ の解で、 $p = 5$ なら $x = 2.500000$ 、共役は 6.250000 — 共通接線は $v = \pm 1$ 、傾き 0.300000000 で、その間で曲線は接線より下に一点も落ちない — [論文507]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

変換と限界と相共存は、別々の道具だと思われている。本稿が示すのは、三つとも答が「接する」ところで決まっていることである——接点の位置が、そのまま答になる。新しい定理も法則も主張しない。第一に、ルジャンドル変換の接点は $f'(x) = p$ の解で、 $p = 5$ なら $x = 2.500000$ 、共役は 6.250000 である（第2節）。第二に、凸関数なら二回変換で戻る—— 9.000000000 対 9.000000000 （第2節）。第三に、チャーノフ限界の最良の指数は 0.082282879 で、KL ダイバージェンスに一致する（第3節）。第四に、その接点は $\lambda^* = \ln(a/(1-a)) = 0.847298$ である——ずらすと指数が下がる（第3節）。第五に、これが本稿の芯である。共通接線は $v = \pm 1$ 、傾き 0.300000000 で、その間で曲線は接線より下に 0 点しか落ちない（第4節）。第六に、分離子は「一点で接するか、二点で接するか」である（第5節）。キーワード：ルジャンドル変換、チャーノフ限界、共通接線、凸解析、双対性。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——ルジャンドル変換、チャーノフ限界、共通接線構成は、いずれも標準的である。凸解析を書かない——劣微分、双対性、一般の凸集合には立ち入らない。滑らかな一変数の場合だけを見る。等面積則を計算していない——マクスウェルの等面積則は圧力体積曲線の側の言明であり、本稿は自由エネルギー側の共通接線だけを扱う。熱力学を作らない——相共存、潜熱、実在の状態方程式は主題ではない。二重井戸の関数を一つ置くだけである。四つ目を数えていない——ギブズの変分原理も同じ形だと言われるが、本稿は数を出していない。数えたのは三つである。既刊との関係：論文487は停留点が最小・最大・縮退の三通りあると示した——あちらは一点で接する場合の分類、こちらは接する点の数そのものである。論文486は三つの分野の最適点と同じ頂点だと示した——同じく、別々に見える答が一つの操作から出る場合である。論文300は同根か別根かが判定できると示した——一点接触と二点接触は別根である。論文481は分離子が無いと反証の行き先が決まらなると示した——本稿はその分離子を一本書く。加えたのは、三つの接点を同じ表に置いたこと、ルジャンドルの共役と二回変換を数で確かめたこと、チャーノフの接点が $\ln(a/(1-a))$ だと確かめたこと、共通接線を厳密解と 10^{-6} で突き合わせたこと、凸化の判定を「下に落ちる点の数」で書いたことである。

1. 記法と問い

設定：三つの場面で、答がどこから出るかを見る。ルジャンドル変換は

$$f^*(p) = \max_x [px - f(x)]$$

で、最大を与える x は $f'(x) = p$ を満たす。チャーノフ限界は $\max_\lambda [\lambda a - \ln M(\lambda)]$ で、共通接線は二点で同じ傾きを持つ直線である。以下、 $f(x) = x^2$ 、フェアコインで $a = 0.7$ 、 $g(v) = (v^2 - 1)^2 + 0.3v$ を使う。

観察 1.1

変換と限界と相共存は、別々の道具だと思われる。熱力学の変数変換、確率の不等式、物質の相図——分野も目的も違う、という像である。

観察 1.2

だが三つとも、最大か最小を取っている。 $\max_x$ 、 $\max_\lambda$ 、共通の傾き——そして最大の条件は、接することである。

問い：接点はどこに来て、答とどう繋がるのか。

2. ルジャンドル変換 — 一点で接する

計算 2.1 : $f(x) = x^2$ の共役を数値で求める。

p	$f^*(p)$	厳密 $p^2/4$	接点 x
2.0	1.000000	1.000000	1.000000
5.0	6.250000	6.250000	2.500000

観察 2.2

共役が閉じた式に一致する。6.250000000 対 6.250000000——独立な確認である。

観察 2.3

接点が $f'(x) = p$ を満たす。 $f'(2.500000) = 5.000000$ 対 $p = 5.0$ ——最大を取った点で、傾きが p になっている。

観察 2.4

二回変換すると元に戻る。9.000000000 対 9.000000000——凸関数だからで、接線の族が関数を復元している。

観察 2.5

つまり変換は、接線を数えなおす操作である。点の集まりから、接線の集まりへ——答は接点の位置が決めている。

3. チャーノフ限界 — 接する指数を選ぶ

計算 3.1 : フェアコインで $a = 0.7$ のときの最良の指数を、 λ を走査して求める。

量	値
最良の λ (数値)	0.847300
接点 $\ln(a/(1-a))$ (閉じた式)	0.847298
最良の指数	0.082282879
KL ダイバージェンス	0.082282879

観察 3.2

最良の指数が KL ダイバージェンスに一致する。0.082282879 対 0.082282879——最適化の答が、情報量の言葉で書き直せる。

観察 3.3

接点が閉じた式に一致する。0.847300 対 0.847298——差は走査の刻み 10^{-5} による。

観察 3.4

$\lambda = 0$ では限界が自明になる。0.000000000000——境目の反対側であり、何も言っていない不等式になる。

観察 3.5

最良でない λ では指数が下がる。半分にすると 0.062460777、2 倍にすると 0.016145752——どちらも 0.082282879 より小さく、本当に最大である。

観察 3.6

ここでもルジャンドル変換が働いている。 $\max_{\lambda} [\lambda a - \ln M(\lambda)]$ ——キュムラント母関数の共役であり、接点が最良の λ である。

4. 共通接線 ― 二点で接する

計算 4.1 : $g(v) = (v^2 - 1)^2 + 0.3v$ の共通接線を数値で探し、厳密解と比べる。

量	数値	厳密
左の接点	-1.000000	-1
右の接点	1.000000	+1
傾き	0.300000000	0.300000000
残差	2.393×10^{-10}	—

観察 4.2

接点が厳密解に一致する。±1——直線 $0.3v$ を足しても接点が動かないため、傾きだけが 0.3 になる。

観察 4.3

二点で傾きが一致する。残差 2.393×10^{-10} ——一点で接しているのではなく、間隔 2.000000 の二点である。

観察 4.4

その間で、曲線は接線より下に一点も落ちない。0 個——凸化になっており、二つの相が共存する区間である。

観察 4.5

傾きをずらすと、下に落ちる。1.5 倍にすると 3358 個、最深 -0.300000——検査が傾きに反応しており、共通接線であることが効いている。

観察 4.6

両端で接線の値が曲線に一致する。 0.3000000000 対 0.3000000000 ——接しているのだから当然だが、独立に確かめた。

5. 分離子

分離子：接するのが一点か、二点か。

観察 5.1

一点なら、答は一つの数である。ルジャンドルの $f^*(p)$ 、チャーノフの指数——接点が動けば答も動く。

観察 5.2

二点なら、答は一つの区間である。 $v \in [-1, 1]$ ——その間では、どこにいても同じ傾きを共有する。

観察 5.3

二つは論文300の基準で別根である。どちらも「接するところで決まる」——一方は点を返し、一方は区間を返す。返す物の型が違う。

観察 5.4

論文487は一点接触の側を三つに分けた。最小・最大・縮退——あちらは接した先の形、こちらは接した点の数である。二段の分類になっている。

観察 5.5

論文486とも同じ形である。三つの分野の最適点が同じ頂点——別々に見える答が、一つの操作から出る。

観察 5.6

これは論文481 という分離子の一本である。「最適化の答が合わない」という報告が来たとき——接点を取り違えたのか、一点接触と二点接触を混同したのかで、直す先が違う。

観察 5.7

正直に言えば——数えたのは三つで、等面積則は計算していない。マクスウェルの等面積則は圧力体積曲線の側の言明である——自由エネルギー側の共通接線と対応することは知られているが、本稿はその対応を数で確かめていない。ギブズの変分原理も同じ形だと言われるが、これも数を出していない。

6. 点呼と結び

1. $f^*(5) = 6.250000$ (計算 2.1) : 接点 $x = 2.500000$ 。
2. 接点が $f'(x) = p$ を満たす (観察 2.3) : 傾きが p 。
3. 二回変換で戻る (観察 2.4) : 9.000000000 。
4. チャーノフの指数 0.082282879 (計算 3.1) : KL と一致。
5. 接点 $\lambda^* = 0.847298$ (観察 3.3) : $\ln(a/(1-a))$ 。
6. ずらすと指数が下がる (観察 3.5) : 本当に最大。
7. 共通接線の傾き 0.300000000 (計算 4.1) : 本稿の芯。
8. 下に落ちる点が 0 個 (観察 4.4) : 凸化になっている。
9. 分離子は一点か二点か (観察 5.3) : 論文300 の基準で別根。
10. 等面積則は計算していない (観察 5.7) : 数えたのは三つ。

結び：変換と限界と相共存は、別々の道具だと思われている——熱力学の変数変換、確率の不等式、物質の相図。分野も目的も違うという像である。だが三つとも最大か最小を取っており、最大の条件は接することである。ルジャンドル変換——一点で接する—— $f(x) = x^2$ の共役は $p = 2.0$ で 1.000000 、 $p = 5.0$ で 6.250000 となり、閉じた式 $p^2/4$ に一致する。接点は $p = 5.0$ で $x = 2.500000$ 、そこで $f'(2.500000) = 5.000000$ となり、最大を取った点で傾きが p になっている。二回変換すると 9.000000000 対 9.000000000 で元に戻る。凸関数だからで、接線の族が関数を復元している。つまり変換は接線を数えなおす操作で、点の集まりから接線の集まりへ移り、答は接点の位置が決めている。チャーノフ限界——接する指数を選ぶ——フェアコインで $a = 0.7$ のとき、最良の λ は 0.847300 、最良の指数は 0.082282879 で、KL ダイバージェンス 0.082282879 に一致する。接点は閉じた式 $\ln(a/(1-a)) = 0.847298$ に一致し、差は走査の刻み 10^{-5} による。 $\lambda = 0$ では

0.000000000000 となって何も言っていない不等式になり、境目の反対側である。最良でない λ では指数が下がり、半分で **0.062460777**、2 倍で **0.016145752** と、どちらも下回る。ここでもルジャンドル変換が働いており、キュムラント母関数の共役の接点が最良の λ である。共通接線——二点で接する—— $g(v) = (v^2 - 1)^2 + 0.3v$ の共通接線は、数値でも厳密でも接点 $v = \pm 1$ 、傾き **0.300000000**、残差 2.393×10^{-10} である。直線 $0.3v$ を足しても接点は動かず、傾きだけが **0.3** になる。二点で傾きが一致しており、一点で接しているのではなく間隔 **2.000000** の二点である。その間で曲線は接線より下に **0** 点しか落ちず、凸化になっていて、二つの相が共存する区間である。傾きを **1.5** 倍にすると **3358** 個が下に落ち、最深 **-0.300000**——検査が傾きに反応している。分けているものは一つ——接するのが一点か、二点か。一点なら答は一つの数で、接点が動けば答も動く。二点なら答は一つの区間で、その間ではどこにいても同じ傾きを共有する。二つは論文**300**の基準で別根であり、どちらも「接するところで決まる」が、一方は点を返し一方は区間を返す。返す物の型が違う。論文**487**は一点接触の側を最小・最大・縮退の三つに分けた。あちらは接した先の形、こちらは接した点の数で、二段の分類になっている。論文**486**とも同じ形で、三つの分野の最適点と同じ頂点だったように、別々に見える答が一つの操作から出る。これは論文**481**でいう分離子の一本で、「最適化の答が合わない」という報告が来たとき、接点を取り違えたのか、一点接触と二点接触を混同したのかで直す先が違う。正直に言えば——数えたのは三つで、等面積則は計算していない。マクスウェルの等面積則は圧力体積曲線の側の言明で、自由エネルギー側の共通接線と対応することは知られているが、本稿はその対応を数で確かめていない。ギブズの変分原理も同じ形だと言われるが、これも数を出していない。

参考文献

1. Chernoff, H. (1952). A Measure of Asymptotic Efficiency for Tests of a Hypothesis Based on the Sum of Observations. *Annals of Mathematical Statistics*.
2. Legendre, A.-M. (1787). Mémoire sur l'intégration de quelques équations aux différences partielles. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*.
3. Rockafellar, R. T. (1970). *Convex Analysis*. Princeton University Press.
4. 山岸勇輝 (2026). 『三百本目の点呼 —— 同根か別根かは、判定できる』[論文300]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22171914
5. 山岸勇輝 (2026). 『「法則が破れた」は、どの仮定へも落とせる』[論文481]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22733927
6. 山岸勇輝 (2026). 『三つの分野に出る「ちょうど半分」は、物理ではなく二次関数の頂点である』[論文486]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22759952
7. 山岸勇輝 (2026). 『停留点は三通りある —— 最小と、最大と、どこでも同じ』[論文487]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22759965

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)