

閾値と最終規模は、同じ R_0 から出るのに、比が一定にならない

— $R_0 = 2$ で、閾値 $1 - 1/R_0$ は **0.500000**、最終規模は **0.796812** — 閾値は線形化から、最終規模は非線形の方程式 $z = 1 - e^{-R_0 z}$ から出るので、二つは同じ量ではない — [論文511]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

閾値と最終規模は、どちらも R_0 で決まるのだから同じことを言っていると思われがちである。本稿が示すのは、二つの比が R_0 で変わることである——**1.7484** から **1.2413** まで動く。新しい定理も法則も主張しない。第一に、 $R_0 = 2$ の閾値は **0.500000**、最終規模は **0.796812** である（第2節）。第二に、最終規模から逆算すると R_0 に戻る——**2.000000000** 対 **2.0**（第2節）。第三に、 $R_0 = 1$ でも $R_0 = 0.9$ でも最終規模は **0** である——境目の両側で確かめた（第2節）。第四に、これが本稿の芯である。二つの比は $R_0 = 1.5$ で **1.7484**、 $R_0 = 5$ で **1.2413** と変わる（第3節）。第五に、 R_0 が大きいほど比が **1** に寄る——どちらも **1** へ近づくが、速さが違う（第3節）。第六に、分離子は「線形化から出たか、非線形の方程式から出たか」である（第4節）。キーワード：基本再生産数 R_0 、閾値定理、最終規模方程式、SIR 模型、感染症の数理。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——閾値定理も最終規模の方程式も標準的である。疫学の助言をしない——接種の方針、実際の R_0 の推定、介入の効果は主題ではない。二つの量の関係だけを見る。模型を一つに固定する——一様に混ざる閉じた集団の SIR 模型だけを扱う。年齢構造、空間、時間変化する接触率は入れない。歴史の優先権を判定しない——閾値の考えが誰にいつ帰属するかは扱わない。有効率を扱わない——論文401 が扱ったワクチンの有効率は入れず、免疫すべき割合そのものを見る。既刊との関係：論文401 は全員に免疫は要らないが、有効率が足りないと全員に打っても届かないと示した——そこで使われた閾値と、本稿の最終規模は別の量である。論文300 は同根か別根かが判定できると示した——同じ R_0 から出る二つの量が、別根でありうる。論文486 は三つの分野の最適点が同じ頂点だと示した——あちらは別々に見えて同根、こちらは同じに見えて別根である。論文481 は分離子が無いと反証の行き先が決まらなると示した——本稿はその分離子を一本書く。加えたのは、 R_0 ごとに二つを同じ表に置いたこと、最終規模を **0.796812** と解き逆算で確かめたこと、境目の両側を $R_0 = 1$ と **0.9** で確かめたこと、比が **1.7484** から **1.2413** へ動くことを出したこと、分離子を線形化と非線形に置いたことである。

1. 記法と問い

設定：一様に混ざる閉じた集団で、基本再生産数を R_0 と書く。流行が起きない条件から、免疫すべき割合は

$$p_c = 1 - \frac{1}{R_0}$$

である。一方、流行が終わったときに感染を経た割合 z は

$$z = 1 - e^{-R_0 z}$$

の正の解である。前者は感染者が少ないときの線形化から、後者は流行の全体を通した収支から出る。以下、 R_0 を動かして二つを並べる。

観察 1.1

閾値と最終規模は、どちらも R_0 で決まる。同じ一つの数から出る——だから同じことを言っている、という像である。

観察 1.2

だが式の形が違う。 $1 - 1/R_0$ と $z = 1 - e^{-R_0 z}$ ——片方は閉じた式、片方は自分自身を含む方程式である。

問い：二つはどれだけ離れ、その離れ方は一定か。

2. 二つを並べる

計算 2.1： R_0 ごとに閾値と最終規模を出す。

R_0	閾値 $1 - 1/R_0$	最終規模 z
0.9	0.000000	0.000000
1.0	0.000000	0.000000
1.5	0.333333	0.582812
2.0	0.500000	0.796812
3.0	0.666667	0.940480

観察 2.2

$R_0 = 2$ の最終規模が既知の値に合う。0.796812——よく引かれる約 80 パーセントと一致する。

観察 2.3

逆算すると R_0 に戻る。 $-\ln(1 - z)/z = 2.000000000$ 対 2.0——独立な確認である。

観察 2.4

$R_0 = 1$ で最終規模がゼロになる。境目——閾値もゼロで、二つがそこで一致する。

観察 2.5

$R_0 = 0.9$ でもゼロである。境目の反対側——閾値の式は負を返すので 0 で切っており、最終規模はもともと正の解を持たない。

観察 2.6

閾値より最終規模のほうが大きい。 $0.796812 > 0.500000$ ——流行が止まるのは、閾値を超えた「あと」だからである。

3. 比が一定にならない

計算 3.1：最終規模を閾値で割る。

R_0	最終規模／閾値
1.5	1.7484
2.0	1.5936
3.0	1.4107
5.0	1.2413

観察 3.2

比が R_0 で変わる。1.7484 から 1.2413——もし二つが同じ量の別表現なら、比は一定になるはずである。

観察 3.3

R_0 が大きいほど比が 1 に寄る。1.2413——どちらも 1 へ近づくが、閾値のほうが遅い。

観察 3.4

だから「閾値を知れば最終規模も分かる」は、比例では書けない。 R_0 を経由する必要がある——二つの間に、 R_0 に依らない関係は無い。

観察 3.5

差は「オーバーシュート」と呼ばれる。 $R_0 = 2$ で $0.796812 - 0.500000 = 0.296812$ ——閾値に達した時点で流行が止まらず、行き過ぎる分である。

4. 分離子

分離子：線形化から出たか、非線形の方程式から出たか。

観察 4.1

線形化から出たなら、閉じた式で書ける。 $1 - 1/R_0$ ——感染者が少ない時点だけを見ており、その後の経過を含まない。

観察 4.2

非線形の方程式から出たなら、自分自身を含む。 $z = 1 - e^{-R_0 z}$ ——流行の全体を通した収支であり、数値でしか解けない。

観察 4.3

二つは論文300の基準で別根である。どちらも R_0 から出る——一方は流行が始まるかどうかの条件、一方は始まったあとの結果で、問うている時点が違う。

観察 4.4

比が動くことが、その証拠になっている。 1.7484 から 1.2413 ——同根なら、 R_0 に依らない換算があるはずである。

観察 4.5

論文401は閾値の側だけを使った。全員に免疫は要らない——そこで効いていたのは $1 - 1/R_0$ であって、最終規模ではない。

観察 4.6

論文486とは向きが逆である。あちらは別々に見えて同根——こちらは同じに見えて別根である。同じ判定が、両向きに使える。

観察 4.7

正直に言えば——模型は一様に混ざる閉じた集団である。年齢構造も空間も接触率の変化も入れていない——実際の流行では最終規模はこれより小さくなることが多く、**0.796812** は上限に近い値である。示したのは二つの量の関係であって、予測ではない。

5. 点呼と結び

1. $R_0 = 2$ で閾値 **0.500000** (計算 2.1) : 最終規模 **0.796812**。
2. 既知の約 80 パーセントと一致 (観察 2.2) : 独立な確認。
3. 逆算で **2.000000000** (観察 2.3) : R_0 に戻る。
4. $R_0 = 1$ でも **0.9** でもゼロ (観察 2.5) : 境目の両側。
5. 比が **1.7484** から **1.2413** (計算 3.1) : 本稿の芯。
6. R_0 が大きいほど 1 に寄る (観察 3.3) : 閾値のほうが遅い。
7. 差は **0.296812** (観察 3.5) : 行き過ぎる分。
8. 分離子は線形化か非線形か (観察 4.3) : 論文300 の基準で別根。
9. 論文486 とは向きが逆 (観察 4.6) : 同じ判定が両向きに使える。
10. 一様に混ざる模型である (観察 4.7) : 予測ではない。

結び : 閾値と最終規模は、どちらも R_0 で決まる——同じ一つの数から出るのだから同じことを言っている、という像である。だが式の形が違う。 $1 - 1/R_0$ と $z = 1 - e^{-R_0 z}$ で、片方は閉じた式、片方は自分自身を含む方程式である。二つを並べる—— $R_0 = 2$ で閾値は **0.500000**、最終規模は **0.796812** で、よく引かれる約 80 パーセントと一致する。最終規模から $-\ln(1 - z)/z$ を計算すると **2.000000000** となり、 R_0 に戻る。 $R_0 = 1$ では最終規模も閾値もゼロで、そこで二つが一致する。 $R_0 = 0.9$ でもゼロで、閾値の式は負を返すので 0 で切っており、最終規模はもともと正の解を持たない。そして閾値より最終規模のほうが大きい。流行が止まるのは、閾値を超えた「あと」だからである。比が一定にならない——最終規模を閾値で割ると、 $R_0 = 1.5$ で **1.7484**、**2.0** で **1.5936**、**3.0** で **1.4107**、**5.0** で **1.2413** となる。もし二つが同じ量の別表現なら、比は一定になるはずである。 R_0 が大きいほど比は 1 に寄るが、どちらも 1 へ近づくなかで閾値のほうが遅い。だから「閾値を知れば最終規模も分かる」は比例では書けず、 R_0 を経由する必要がある。二つの間に R_0 に依らない関係は無い。差は $R_0 = 2$ で **0.796812** - **0.500000** = **0.296812**、閾値に達した時点で流行が止まらず行き過ぎる分である。分けているものは一つ——線形化から出たか、非線形の方程式から出たか。線形化から出たなら閉じた式で書け、 $1 - 1/R_0$ は感染者が少ない時点だけを見ていて、その後の経過を含まない。非線形の方程式から出たなら自分自身を含み、 $z = 1 - e^{-R_0 z}$ は流行の全体を通した収支で、数値でしか解けない。二つは論文300 の基準で別根であり、どちらも R_0 から出るが、一方は流行が始まるかどうかの条件、一方は始まったあとの結果で、問うて

いる時点が違う。比が **1.7484** から **1.2413** へ動くことが、その証拠になっている。同根なら、 R_0 に依らない換算があるはずである。論文**401** は閾値の側だけを使い、そこで効いていたのは $1 - 1/R_0$ であって最終規模ではない。論文**486** とは向きが逆で、あちらは別々に見えて同根、こちらは同じに見えて別根である。同じ判定が両向きに使える。正直に言えば——模型は一様に混ざる閉じた集団である。年齢構造も空間も接触率の変化も入れておらず、実際の流行では最終規模はこれより小さくなることが多い。**0.796812** は上限に近い値であり、示したのは二つの量の関係であって予測ではない。

参考文献

1. Diekmann, O., Heesterbeek, H., & Britton, T. (2013). *Mathematical Tools for Understanding Infectious Disease Dynamics*. Princeton University Press.
 2. Kermack, W. O., & McKendrick, A. G. (1927). A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics. *Proceedings of the Royal Society A*.
 3. Ross, R. (1911). *The Prevention of Malaria* (2nd ed.). John Murray.
 4. 山岸勇輝 (2026). 『三百本目の点呼 — 同根か別根かは、判定できる』 [論文300]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22171914
 5. 山岸勇輝 (2026). 『全員に免疫は要らない。ただし有効率が足りないと、全員に打っても届かない』 [論文401]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22699375
 6. 山岸勇輝 (2026). 『「法則が破れた」は、どの仮定へも落とせる』 [論文481]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22733927
 7. 山岸勇輝 (2026). 『三つの分野に出る「ちょうど半分」は、物理ではなく二次関数の頂点である』 [論文486]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22759952
-

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)