

余りを三等分して引くと、曲面の問題が平面の問題に化ける

— 各角からその三分の一を引いて平面の三角形として解くと、残る誤差は過剰の二乗で増え、100 万 km^2 でも過剰の 4.106×10^{-4} にとどまる — [論文512]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

曲面の三角形は、曲面の道具で解くほかないと思われている。本稿が示すのは、余りを三等分して引けば平面の道具で足りることである——残る誤差は過剰の二乗で増え、実用の範囲では消える。新しい定理も法則も主張しない。第一に、球面過剰は面積に比例する——100 km^2 で 0.508171 秒角、 10^4 倍の面積で 10^4 倍（第2節）。第二に、100 万 km^2 の球面過剰は 1.411586 度である（第2節）。第三に、逆算すると面積に戻る——1000000.000000 対 1000000（第2節）。第四に、これが本稿の芯である。三等分して引いたあとの残差は、面積を 100 倍にすると 10000.000000 倍になる——過剰の二乗で増える（第3節）。第五に、100 万 km^2 でも残差は過剰の 4.106×10^{-4} で、100 km^2 では 4.106×10^{-8} である（第3節）。第六に、分離子は「余りを均すか、曲面のまま解くか」である（第4節）。キーワード：球面過剰、ルジャンドルの定理、球面三角形、測地学、三角測量。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——球面過剰の公式もルジャンドルの定理も標準的である。測地学を作らない——地球の扁平、測量の誤差、実際の三角測量の手順は主題ではない。球面の三角形だけを見る。二次の係数を導かない——残差の係数は既知の値を使っており、本稿で導いてはいない。角そのものを解かない——三角形の辺や角を実際に解いてはおらず、近似の残差の大きさだけを見る。球以外を扱わない——回転楕円体では過剰の式が変わるが、そこには立ち入らない。既刊との関係：論文409 は歪まない地図が存在しないと示し、100 万 km^2 で 1.4113 度余ると出した——本稿はその余りを、どう処理すれば消えるかを見る。論文224 はどこを触っても平らで、合計は 4π だと示した——余りが局所では小さく、大域では消えないという同じ形である。論文300 は同根か別根かが判定できると示した——均す解き方と曲面のまま解く解き方は別根である。論文481 は分離子が無いと反証の行き先が決まらなると示した——本稿はその分離子を一本書く。加えたのは、球面過剰を三つの面積で出したこと、逆算で面積に戻ることを確かめたこと、残差が二乗で増えることを 10000.000000 倍で示したこと、残差と過剰の比を 4.106×10^{-4} と 4.106×10^{-8} で出したこと、分離子を近似の作法に置いたことである。

1. 記法と問い

設定：半径 R の球面上で、面積 A の三角形を取る。三つの内角の和は π を超え、その超過は

$$\epsilon = \frac{A}{R^2}$$

である。ルジャンドルの定理は、各角から $\epsilon/3$ を引いて、同じ辺の長さを持つ平面の三角形として解いてよいと言う。以下 $R = 6371 \text{ km}$ として、過剰と、その処理のあとに残る誤差を測る。

観察 1.1

曲面の三角形は、曲面の道具で解くほかないと思われている。球面三角法——平面の公式は使えない、という像である。

観察 1.2

だが超過は面積に比例するだけで、三つの角に散らばっていない。一つの数 ϵ ——それを均せば、平面に持ち込めるかもしれない。

問い：均したあと、どれだけ残るのか。

2. 過剰は面積に比例する

計算 2.1：三つの面積で球面過剰を出す。

面積	球面過剰 (rad)	秒角
100 km ²	2.463682790 × 10 ⁻⁶	0.508171
10 ⁴ km ²	2.463682790 × 10 ⁻⁴	50.817105
10 ⁶ km ²	2.463682790 × 10 ⁻²	5081.710534

観察 2.2

100 万 km² で 1.411586 度になる。1.4 度——三角形の内角の和が 181.4 度あるということである。

観察 2.3

面積に比例する。 10^4 倍の面積で 10000.000000 倍——閉じた式が線形であることの確認である。

観察 2.4

逆算すると面積に戻る。1000000.000000 対 1000000——独立な確認である。

観察 2.5

100 km^2 では 0.508171 秒角しかない。一辺 15 km ほどの三角形——十九世紀の測量でも測れる大きさだが、無視できるほどではない。

3. 三等分して引くと、二乗しか残らない

計算 3.1：各角から $\epsilon/3$ を引いて平面で解いたときの、残る誤差を出す。

面積	過剰 ϵ	二次の残り	比
100 km^2	2.463683×10^{-6}	1.011622×10^{-13}	4.106×10^{-8}
10^4 km^2	2.463683×10^{-4}	1.011622×10^{-9}	4.106×10^{-6}
10^6 km^2	2.463683×10^{-2}	1.011622×10^{-5}	4.106×10^{-4}

観察 3.2

残差が過剰の二乗で増える。面積を 100 倍にすると残差が 10000.000000 倍——過剰は 100 倍にしかないなので、比は 100 倍で悪くなる。

観察 3.3

それでも 100 万 km^2 で比が 4.106×10^{-4} である。過剰の 2400 分の 1 以下——一度均せば、残りは実用の範囲で消える。

観察 3.4

100 km^2 では比が 4.106×10^{-8} である。4 桁小さい——境目の反対側であり、小さい三角形ほど良い。

観察 3.5

だから近似の質は面積で決まる。形でも位置でもない——どこに置いた三角形でも、面積が同じなら同じだけ残る。

観察 3.6

三等分が効いているのは、一次の項をちょうど消すからである。三つの角に等しく配る——均さずに一つの角だけから引けば、一次の項が残る。

4. 分離子

分離子：余りを均して平面に持ち込むか、曲面のまま解くか。

観察 4.1

均すなら、平面の道具で足りる。正弦定理も余弦定理も、平面の形——代わりに二次の誤差を負う。

観察 4.2

曲面のまま解くなら、誤差は無い。球面三角法——代わりに道具が違う。

観察 4.3

二つは論文300の基準で別根である。どちらも「三角形を解く」——一方は近似で誤差を持ち、一方は厳密である。誤差の有無が判定になる。

観察 4.4

論文409 が出した余りは、この過剰である。100 万 km^2 で 1.4113 度——本稿の 1.411586 度と同じ量で、あちらは「消えない」ことを、こちらは「均せる」ことを見ている。

観察 4.5

論文224 とも同じ形である。どこを触っても平らで、合計は 4π ——局所では余りが小さく、大域では消えない。三等分は、その小ささを使う道具である。

観察 4.6

これは論文481 でいう分離子の一本である。「平面で計算したら合わなかった」という報告が来たとき——均し忘れたのか、三角形が大きすぎたのかで、直す先が違う。

観察 4.7

正直に言えば——二次の係数は既知の値を使った。 $\epsilon^2/60$ ——本稿では導いていない。示したのは残差が二乗で増えることと、その大きさが面積で決まることであって、係数そのものの検証ではない。

5. 点呼と結び

1. 100 km^2 で 0.508171 秒角（計算 2.1）：測れる大きさ。
2. 100 万 km^2 で 1.411586 度（観察 2.2）：内角の和が 181.4 度。
3. 面積に比例する（観察 2.3）：10000.000000 倍。
4. 逆算で面積に戻る（観察 2.4）：独立な確認。
5. 残差が二乗で増える（観察 3.2）：本稿の芯。
6. 100 万 km^2 で比 4.106×10^{-4} （計算 3.1）：2400 分の 1 以下。
7. 100 km^2 で 4.106×10^{-8} （観察 3.4）：4 桁小さい。
8. 三等分が一次の項を消す（観察 3.6）：均すことが効いている。
9. 分離子は均すか曲面のままか（観察 4.3）：論文300 の基準で別根。

10. 二次の係数は借りた（観察 4.7）：導いてはいない。

結び：曲面の三角形は、曲面の道具で解くほかないと思われている——球面三角法があり、平面の公式は使えないという像である。だが超過は面積に比例するだけで、三つの角に散らばってはいない。一つの数 ϵ であり、それを均せば平面に持ち込めるかもしれない。過剰は面積に比例する—— $R = 6371 \text{ km}$ で、球面過剰は 100 km^2 で **0.508171** 秒角、 10^4 km^2 で **50.817105** 秒角、 10^6 km^2 で **5081.710534** 秒角である。 100 万 km^2 では **1.411586** 度、つまり三角形の内角の和が **181.4** 度あるということである。面積に比例し、 10^4 倍の面積で **10000.000000** 倍になる。逆算すると **1000000.000000** と面積に戻る。 100 km^2 でも **0.508171** 秒角あり、一辺 **15 km** ほどの三角形は十九世紀の測量でも測れる大きさだが、無視できるほどではない。三等分して引くと、二乗しか残らない——各角から $\epsilon/3$ を引いて平面で解くと、残る誤差は 100 km^2 で 1.011622×10^{-13} 、 10^6 km^2 で 1.011622×10^{-5} である。面積を **100** 倍にすると残差は **10000.000000** 倍になり、過剰は **100** 倍にしかならないので、比は **100** 倍で悪くなる。それでも 100 万 km^2 で比は 4.106×10^{-4} 、過剰の **2400** 分の **1** 以下で、一度均せば残りは実用の範囲で消える。 100 km^2 では比が 4.106×10^{-8} と **4** 桁小さい。だから近似の質は面積で決まり、形でも位置でもない。どこに置いた三角形でも、面積が同じなら同じだけ残る。三等分が効いているのは一次の項をちょうど消すからで、均さずに一つの角だけから引けば一次の項が残る。分けているものは一つ——余りを均して平面に持ち込むか、曲面のまま解くか。均すなら平面の道具で足り、正弦定理も余弦定理も平面の形が使えるが、代わりに二次の誤差を負う。曲面のまま解くなら誤差は無いが、代わりに道具が違う。二つは論文**300**の基準で別根であり、どちらも「三角形を解く」だが、一方は近似で誤差を持ち、一方は厳密である。誤差の有無が判定になる。論文**409**が出した余りはこの過剰そのもので、 100 万 km^2 で **1.4113** 度、本稿の **1.411586** 度と同じ量である。あちらは「消えない」ことを、こちらは「均せる」ことを見ている。論文**224**とも同じ形で、どこを触っても平らで合計は 4π ——局所では余りが小さく、大域では消えない。三等分は、その小ささを使う道具である。これは論文**481**でいう分離子の一本で、「平面で計算したら合わなかった」という報告が来たとき、均し忘れたのか三角形が大きすぎたのかで直す先が違う。正直に言えば——二次の係数 $\epsilon^2/60$ は既知の値を使っており、本稿では導いていない。示したのは残差が二乗で増えることと、その大きさが面積で決まることであって、係数そのものの検証ではない。

参考文献

1. Gauss, C. F. (1828). *Disquisitiones Generales circa Superficies Curvas*. Dieterich, Göttingen.
2. Legendre, A.-M. (1787). Mémoire sur les opérations trigonométriques dont les résultats dépendent de la figure de la terre. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*.
3. Torge, W., & Müller, J. (2012). *Geodesy* (4th ed.). De Gruyter.
4. 山岸勇輝 (2026). 『どこを触っても平らで、それでも合計は 4π である』[論文224]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22120836
5. 山岸勇輝 (2026). 『三百本目の点呼——同根か別根かは、判定できる』[論文300]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22171914
6. 山岸勇輝 (2026). 『歪まない地図は存在しない——投影法が下手だからではない』[論文409]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22699616

7. 山岸勇輝 (2026). 『「法則が破れた」は、どの仮定へも落とせる』 [論文481]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22733927

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)