

単位から自由になったのではなく、単位の選択を共分散に委ねただけである

— 第一軸の単位を 100 倍にすると、素の距離は 5.000000 から 300.026665 へ動くが、共分散で測った距離は 4.123105626 のまま桁一つ動かない — 単位行列にすると素の距離 5.000000000000 に戻る

— [論文516]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

共分散で測る距離は、単位の選び方から自由だと言われる。本稿が示すのは、自由になったのではなく、選択が共分散に移っただけであることである——共分散を取り替えると値が変わる。新しい定理も法則も主張しない。第一に、素の距離は 5.000000000000、共分散で測ると 4.123105626 である（第2節）。第二に、これが本稿の芯である。第一軸の単位を 100 倍にすると、素の距離は 300.026665 へ動くが、共分散で測った距離は 4.123105625618 のまま動かない（第2節）。第三に、ところが共分散を取り替えると 3.282952601 になる（第3節）。第四に、相関のある共分散では 2.157439560 になる（第3節）。第五に、単位行列にすると素の距離 5.000000000000 に戻る——境目である（第3節）。第六に、分離子は「選択が消えたか、移ったか」である（第4節）。キーワード：マハラノビス距離、共分散、単位の不変性、統計的距離、多変量解析。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——マハラノビス距離も、それが単位のとり方に依らないことも標準的である。統計を作らない——推定、外れ値検出、判別分析の手法は主題ではない。距離の値だけを見る。高次元を扱わない——二次元の例だけで、次元が上がったときの共分散の推定の難しさには入らない。どの共分散が正しいかを決めない——標本共分散を使うべきか、事前の知識を使うべきかは主題ではない。取り替えると値が変わることを示すだけである。正定値性を前提とする——共分散が退化する場合には入らない。既刊との関係：論文95は規約と事実を分けた——本稿の共分散は、事実に見えて規約の側にいる量である。論文300は同根か別根かが判定できると示した——単位からの自由と、共分散への依存は別根である。論文505は「勢力圏」が三つあり、指数が違おうと示した——どちらも、一つに見える量が選択の数だけあった場合である。論文481は分離子が無いと反証の行き先が決まらないうと示した——本稿はその分離子を一本書く。加えたのは、素の距離と共分散で測った距離を並べたこと、単位を100倍にして片方だけが動くことを示したこと、共分散を三通りに取り替えて値の変化を出したこと、単位行列で素の距離に戻ることを確かめたこと、分離子を「選択が消えたか移ったか」に置いたことである。

1. 記法と問い

設定：二点 $\mathbf{x}$ 、 $\mathbf{y}$ の間の距離を二通りに測る。素の距離は

$$d_E = \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^\top (\mathbf{x} - \mathbf{y})}$$

共分散 Σ で測る距離は

$$d_M = \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^\top \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{y})}$$

である。以下、 $\mathbf{x} = (0, 0)$ 、 $\mathbf{y} = (3, 4)$ とし、 Σ を取り替えたり、軸の単位を変えたりして値を見る。

観察 1.1

共分散で測る距離は、単位の選び方から自由だと言われる。メートルでもキロメートルでも同じ値——恣意性が消えた、という像である。

観察 1.2

だが式には Σ が入っている。どの共分散を使うか——それも一つの選択である。

問い：選択は消えたのか、場所を変えただけか。

2. 単位を変えても動かない

計算 2.1：二つの距離を出す。

測り方	値
素の距離	5.000000000000
共分散 diag(9,1) で測る	4.123105626

観察 2.2

素の距離が 5 になる。3 と 4 の直角三角形——独立に確かめられる値である。

観察 2.3

共分散で測ると別の値になる。**4.123105626**——第一軸のばらつきが大きいので、その方向の差が割り引かれている。

計算 2.4：第一軸の単位を 100 倍にする。

測り方	元の単位	100 倍の単位
素の距離	5.000000	300.026665
共分散で測る	4.123105625618	4.123105625618

観察 2.5

素の距離は 60 倍に動く。5.000000 から 300.026665 へ——単位を変えただけで、二点の関係は変わっていないのに。

観察 2.6

共分散で測った距離は桁一つ動かない。**4.123105625618** 対 **4.123105625618**——共分散も同じ倍率で変わるの、逆行列との間で打ち消す。

観察 2.7

ここまでは「単位から自由」という言い方で困らない。実際に動かない——この操作だけを見ていれば、恣意性が消えたように見える。

3. 共分散を取り替えると、動く

計算 3.1：同じ二点を、別の共分散で測る。

共分散	距離
diag(9, 1)	4.123105626
diag(1, 9)	3.282952601
相関つき（対角 4 、非対角 1.5 ）	2.157439560
単位行列	5.000000000000

観察 3.2

軸を入れ替えるだけで値が変わる。**4.123105626** から **3.282952601**——二点は同じで、共分散だけを取り替えた。

観察 3.3

相関を入れるとさらに変わる。**2.157439560**——非対角の成分が、二つの軸の差を結びつけている。

観察 3.4

単位行列にすると素の距離に戻る。5.000000000000 対 5.000000000000——境目であり、素の距離は「共分散を単位行列に選んだ場合」である。

観察 3.5

つまり素の距離も、一つの選択である。何も選んでいないのではない——単位行列を選んだのである。

観察 3.6

三つの値が 2.16 から 5.00 まで開く。同じ二点——2.3 倍の幅があり、どれを使うかで「遠い」か「近い」かが変わる。

4. 分離子

分離子：選択が消えたのか、場所を変えたのか。

観察 4.1

消えたなら、何を動かしても値が変わらないはずである。単位でも共分散でも——だが共分散では変わった。

観察 4.2

場所を変えたなら、動かす対象が入れ替わる。単位から共分散へ——実際、単位では動かず、共分散では動いた。

観察 4.3

二つは論文300 の基準で別根である。どちらも「恣意性が無い」と言える——一方は選択が存在しないこと、一方は選択が別の場所にあることで、意味が違う。

観察 4.4

論文95 が分けた規約と事実の、境目に立つ量である。共分散は測って決める——事実に見えるが、どの標本から測るか、どの母集団を想定するかは選択であり、そこが規約の側に残る。

観察 4.5

論文505 と同じ形である。「勢力圏」が三つあり、何と釣り合わせたかで指数が違った——こちらは「距離」が共分散の数だけあり、何を基準に割り引いたかで値が違う。

観察 4.6

これは論文481 でいう分離子の一本である。「この距離は単位に依らない」という主張が問われたとき——単位を疑うのか、共分散の選び方を疑うのかで、直す先が違う。

観察 4.7

正直に言えば——どの共分散が正しいかは言っていない。標本から測るのか、事前の知識を使うのか——本稿が示したのは、取り替えると値が変わるということまでである。選択が要するという指摘は、選択が誤りだという指摘ではない。

5. 点呼と結び

1. 素の距離 **5.000000000000** (計算 2.1) : **3** と **4** の直角三角形。
2. 共分散で測ると **4.123105626** (観察 2.3) : 差が割り引かれる。
3. 単位 **100** 倍で素は **300.026665** (計算 2.4) : **60** 倍に動く。
4. 共分散で測ると動かない (観察 2.6) : 本稿の芯。
5. 軸を入れ替えると **3.282952601** (計算 3.1) : 二点は同じ。
6. 相関を入れると **2.157439560** (観察 3.3) : 非対角が効く。
7. 単位行列で **5.000000000000** (観察 3.4) : 素の距離に戻る。
8. 三つの値が **2.3** 倍開く (観察 3.6) : 遠いか近いかが変わる。
9. 分離子は消えたか移ったか (観察 4.3) : 論文300 の基準で別根。

10. どれが正しいかは言っていない（観察 4.7）：選択が要ることまで。

結び：共分散で測る距離は、単位の選び方から自由だと言われる——メートルでもキロメートルでも同じ値になり、恣意性が消えたという像である。だが式には Σ が入っている。どの共分散を使うかも、一つの実験である。単位を変えても動かない—— $x = (0, 0)$ 、 $y = (3, 4)$ で、素の距離は **5.000000000000**、共分散 **diag(9, 1)** で測ると **4.123105626** である。第一軸のばらつきが大きいので、その方向の差が割り引かれている。第一軸の単位を 100 倍にすると、素の距離は **5.000000** から **300.026665** へ 60 倍に動く。単位を変えただけで、二点の関係は変わっていないのに。ところが共分散で測った距離は **4.123105625618** のまま桁一つ動かない。共分散も同じ倍率で変わるので、逆行列との間で打ち消す。ここまでは「単位から自由」という言い方で困らず、この操作だけを見ていれば恣意性が消えたように見える。共分散を取り替えると、動く——同じ二点を **diag(1, 9)** で測ると **3.282952601**、相関つきの共分散で測ると **2.157439560** になる。軸を入れ替えるだけで値が変わり、二点は同じで共分散だけを取り替えた。相関を入れるとさらに変わり、非対角の成分が二つの軸の差を結びつけている。単位行列にすると **5.000000000000** と素の距離に戻る。境目であり、素の距離は「共分散を単位行列に選んだ場合」である。つまり素の距離も一つの実験であって、何も選んでいないのではなく、単位行列を選んだのである。三つの値は **2.16** から **5.00** まで、**2.3** 倍の幅で開き、どれを使うかで「遠い」か「近い」かが変わる。分けているものは一つ——選択が消えたのか、場所を変えたのか。消えたなら、単位でも共分散でも値が変わらないはずだが、共分散では変わった。場所を変えたなら、動かす対象が単位から共分散へ入れ替わる。実際、単位では動かず、共分散では動いた。二つは論文300の基準で別根であり、どちらも「恣意性が無い」と言えるが、一方は選択が存在しないこと、一方は選択が別の場所にあることで、意味が違う。論文95が分けた規約と事実の境目に立つ量でもある。共分散は測って決めるので事実に見えるが、どの標本から測るか、どの母集団を想定するかは選択であり、そこが規約の側に残る。論文505とも同じ形で、あちらは「勢力圏」が三つあって何と釣り合わせたかで指数が違った。こちらは「距離」が共分散の数だけあり、何を基準に割り引いたかで値が違う。これは論文481でいう分離子の一本で、「この距離は単位に依らない」という主張が問われたとき、単位を疑うのか共分散の選び方を疑うのかで直す先が違う。正直に言えば——どの共分散が正しいかは言っていない。標本から測るのか事前の知識を使うのかは主題の外であり、本稿が示したのは取り替えると値が変わることまでである。選択が要するという指摘は、選択が誤りだという指摘ではない。

参考文献

1. Mahalanobis, P. C. (1936). On the Generalised Distance in Statistics. *Proceedings of the National Institute of Sciences of India*.
2. McLachlan, G. J. (1999). Mahalanobis Distance. *Resonance*.
3. Rao, C. R. (1973). *Linear Statistical Inference and Its Applications* (2nd ed.). Wiley.
4. 山岸勇輝 (2026). 『規約と事実を分ける』 [論文95]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758621
5. 山岸勇輝 (2026). 『三百本目の点呼 — 同根か別根かは、判定できる』 [論文300]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22171914
6. 山岸勇輝 (2026). 『「法則が破れた」は、どの仮定へも落とせる』 [論文481]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22733927

7. 山岸勇輝 (2026). 『「勢力圏」は三つあり、質量比を **1000** 分の **1** にすると別々に縮む』 [論文505]. Zenodo.
10.5281/zenodo.22861782

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)