ゼノンの四つの逆理は、一つの解決を共有していない

— 二分法は級数の収束、アキレスは無限和、飛ぶ矢は差分商の極限、競技場は空間の離散化に落ちる

— 四つは四つの別の数学に落ちる — [論文519]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

「ゼノンの逆理は微積分で解決した」と一括りに言われることがある。本稿が示すのは、四つの逆理が四つの別の道具に落ち、そのうち一つは微積分では落ちないことである。新しい定理も法則も主張しない。 第一に、二分法は等比級数の収束で落ちる——50 項で $\mathbf{0.999999999999999}$、1 との差は $\mathbf{8.882 \times 10^{-16}}$ である（第2節）。 第二に、アキレスは無限和が閉じた式に一致することで落ちる——20 段まで足すと $\mathbf{11.111111111111}$ 秒で、$d/(v_1 - v_2)$ と $\mathbf{1.776 \times 10^{-15}}$ の差しかない（第2節）。 第三に、飛ぶ矢は差分商の極限で落ちる——$\mathbf{20.000000000000}$ に収束するが、$h = 10^{-7}$ では $\mathbf{19.999999985032}$ と、かえって悪くなる（第3節）。 第四に、これが本稿の芯である。競技場は微積分では落ちない——空間を格子にすると、相手の列に対する移動は $\mathbf{2}$ 格子、静止列に対しては $\mathbf{1}$ 格子で、半分の時刻に静止列は $\mathbf{0.5}$ 格子という書けない値を要求する（第3節）。 第五に、飛ぶ矢の芯は「一点の位置は速度を決めない」ことである——同じ $t = 2$ で位置 $\mathbf{20.000000}$ を通る二つの運動が、速度 $\mathbf{20.000000}$ と $\mathbf{3.000000}$ を持つ（第3節）。 第六に、分離子は「何を仮定すると逆理が戻るか」である——四つで戻し方が違うことが、四つが別であることの証拠である（第4節）。 キーワード：ゼノンの逆理、アキレスと亀、等比級数、運動の哲学、離散空間。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——等比級数の和、微分の定義、離散空間での相対運動はいずれも標準的である。ゼノンの原文を解釈しない——アリストテレスとシンプリキオスを通してしか伝わっておらず、本稿は伝承された四つの形だけを扱う。ゼノンが何を意図したかは主題ではない。哲学的な決着をつけない——無限分割が可能かという問いには入らない。数学的にどの道具が効くかだけを見る。超準解析に入らない——無限小を実体として扱う定式化は主題ではない。物理の離散性を主張しない——空間が実際に格子であるとは言わない。格子だと仮定すると何が起きるかを計算するだけである。第四の逆理の伝承の異同に立ち入らない——競技場の逆理は伝承の形が複数あり、本稿は相対運動として読む形だけを扱う。既刊との関係：論文213は「戻ってくる」に別根があると示した——本稿は「解決した」に別根があると示す。同じ形の指摘を、動詞を変えて置く。論文300 は同根か別根かが判定できると示した——四つの逆理が別根であることを、戻し方の違いで判定する。論文517 は座標を回すという一つの操作で二つの分け方を分けた——本稿の分離子も操作であり、四つに別々の操作が付く。論文518 は事前分布の食い違いに期限があると示した——そこでは一つの式の幅が縮んだ。ここでは四つの式が最後まで合流しない。論文481 は分離子が無いと反証の行き先が決まらないと示した——「ゼノンは解決した」を疑うとき、四つのどれを疑うかで行き先が変わる。加えたのは、四つの逆理に別々の数を与えたこと、アキレスの無限和を閉じた式と突き合わせたこと、差分商が h を小さくしすぎるとかえって悪くなることを測ったこと、一点の位置が同じで速度が違う二つの運動を置いたこと、競技場だけが微積分で落ちないことを離散の側から示したことである。

1. 記法と問い

設定：伝承されている四つの逆理を、そのまま並べる。

二分法：目的地へ着くには、まず半分、次に残りの半分、と無限に段を踏まねばならない。

アキレス：アキレスが亀のいた場所へ着くころ、亀は先へ進んでいる。

飛ぶ矢：どの瞬間にも矢は静止している。静止の連なりが運動になるのはなぜか。

競技場：互いに逆向きに動く二列は、静止列に対してよりも相手に対して速く動く。

> **観察 1.1**
>
> 四つはよく「微積分で解決した」と一括りにされる。無限級数が有限の和を持つ、という一言——その一言が四つに同じだけ効くかを、本稿は確かめる。

問い：「解決した」という語は、四つで同じことを指しているか。

2. 二分法とアキレス — 級数が落とす二つ

計算 2.1：二分法の段を足す。

項数	和	1 との差
10	**0.999023437500000**	$\mathbf{9.766 \times 10^{-4}}$
30	**0.999999999068677**	$\mathbf{9.313 \times 10^{-10}}$
50	**0.999999999999999**	$\mathbf{8.882 \times 10^{-16}}$

> 観察 2.2
>
> 段の数は無限だが、和は有限である。50 項で $\mathbf{8.882 \times 10^{-16}}$ まで詰まる——10 項ではまだ $\mathbf{9.766 \times 10^{-4}}$ 離れているので、検査は項数に反応している。

計算 2.3：アキレスを数で置く。アキレスの速さ $v_1 = 10$、亀の速さ $v_2 = 1$、先行距離 $d = 100$ とする。閉じた式は $d/(v_1 - v_2) = \mathbf{11.111111111111}$ 秒である。

足した段数	時刻	閉じた式との差
5	**11.111000000000**	$\mathbf{1.111 \times 10^{-4}}$
20	**11.111111111111**	$\mathbf{1.776 \times 10^{-15}}$
60	**11.111111111111**	$\mathbf{1.776 \times 10^{-15}}$

> 観察 2.4
>
> 無限に足した和が、追いつきの式と一致する。**11.111111111111** 対 **11.111111111111**——逆理は「段が無限にある」と言うが、無限にある段の和は有限の式が与える値に等しい。

検算 2.5：距離の側からも確かめる。アキレスの走った距離 $v_1 t = \mathbf{111.111111111}$ と、亀の位置 $d + v_2 t = \mathbf{111.111111111}$ が一致する——時間の式から出した答を、距離という別の量で突き合わせた。

> **観察 2.6**
>
> ここまでの二つは、同じ道具で落ちる。どちらも等比級数の収束——二分法とアキレスを別々に数えるのは、この段では意味が薄い。

> **観察 2.7**
>
> ただし 60 段と 20 段で差が変わらない。どちらも $\mathbf{1.776 \times 10^{-15}}$——20 段で浮動小数の刻みに達しており、それ以上足しても近づかない。数学の収束と計算の収束は別の場所で止まる。

3. 飛ぶ矢と競技場 — 別の道具が要る二つ

計算 3.1：位置を $5t^2$ とし、$t = 2$ での差分商を測る。

刻み h	差分商
10^{-1}	**20.000000000000**
10^{-3}	**19.999999999998**
10^{-5}	**20.000000000131**
10^{-7}	**19.999999985032**

> **観察 3.2**
>
> 閉じた式 $10t = \mathbf{20.000000000000}$ に収束する。速度は「一点で静止しているか」ではなく、極限として定義される——この道具は級数ではなく微分である。

> **観察 3.3**
>
> h を小さくしすぎると、かえって悪くなる。$h = 10^{-7}$ で **19.999999985032**——打ち切りの誤差は小さくなるが、引き算の桁落ちが大きくなる。極限は数学の操作であって、計算の手続きではない。

> **観察 3.4**
>
> $h = 0$ では分子も分母も 0 になる。値を持たない——だから極限という迂回が要る。逆理が突いているのはここである。

計算 3.5：一点の位置が速度を決めないことを、二つの運動で示す。

運動	$t = 2$ での位置	$t = 2$ での速度
$5t^2$	**20.000000**	**20.000000**
$20 + 3(t - 2)$	**20.000000**	**3.000000**

> **観察 3.6**
>
> 位置は一致し、速度は一致しない。**20.000000** 対 **20.000000**、**20.000000** 対 **3.000000**——ゼノンの「どの瞬間にも静止している」は正しい。一点だけを見れば速度は書けない。誤りは、そこから運動が無いと結論する段にある。

計算 3.7：競技場を格子の上に置く。一刻みで、静止列に対して **1** 格子、逆向きに動く相手の列に対して **2** 格子動く。

> **観察 3.8**
>
> 半分の時刻を考えると、書けない値が出る。相手側は **1.0** 格子で整数だが、静止列に対しては **0.5** 格子——格子が最小単位だという仮定と両立しない。

> **観察 3.9**
>
> 連続にすれば **0.5** が書ける。境目の反対側——この逆理を落とすのは級数でも微分でもなく、空間を連続と置くこと、あるいは同時性の規約を書き直すことである。

観察 3.10

つまり第四の逆理は、微積分では落ちない。級数も微分も、連続な空間の上で書かれている——その前提そのものを問うているのが競技場である。

4. 分離子

観察 4.1

分離子は「何を仮定すると逆理が戻るか」である。二分法とアキレスは、級数が発散すれば戻る——飛ぶ矢は、極限を認めなければ戻る。競技場は、空間を離散と置けば戻る。

観察 4.2

戻し方が違うことが、別根である証拠になる。論文300 の判定でいえば、四つは「無限に関する困難」という一語に括られるが、動かすものが違う——一語で括れることは同根の証拠にならない。

観察 4.3

四つのうち二つは同根である。二分法とアキレスは同じ操作で戻る——別根の主張は「四つとも別」ではなく「四つが二つと一つと一つに分かれる」である。

観察 4.4

論文213 と同じ形である。あちらは「戻ってくる」という動詞に別根があった——こちらは「解決した」という動詞に別根がある。動詞を主語にすると、同じ構造が繰り返し出る。

観察 4.5

論文518 と対照になる。あちらでは四つの立場の食い違いが n とともに $1/(n+2)$ で縮んだ——こちらでは四つの逆理が最後まで合流しない。「いずれ一つになる」場合と「ならない」場合がある。

> **観察 4.6**
>
> 論文481 の言い方でいえば、「ゼノンは解決した」を疑うとき、行き先は少なくとも三つある。級数の収束、極限の存在、空間の連続性——どれを疑うかで、反例を探す場所が変わる。

> **観察 4.7**
>
> ゼノンが何を意図したかは言わない。原文は残っておらず、伝承された形しか手元にない——言えるのは、伝承された四つの形に対して、効く道具が四つに分かれるということだけである。

5. 点呼と結び

1. 二分法は 50 項で差 $\mathbf{8.882 \times 10^{-16}}$（計算 2.1）：等比級数の収束。
2. アキレスは $\mathbf{11.111111111111}$ 秒（計算 2.3）：無限和が閉じた式に一致。
3. 距離でも $\mathbf{111.111111111}$ が一致（検算 2.5）：別の量で突き合わせた。
4. 20 段と 60 段で差が変わらない（観察 2.7）：計算の収束は先に止まる。
5. 飛ぶ矢は $\mathbf{20.000000000000}$ に収束（観察 3.2）：道具は微分。
6. $h = 10^{-7}$ で $\mathbf{19.999999985032}$ と悪化（観察 3.3）：桁落ちが勝つ。
7. 位置 $\mathbf{20.000000}$ が同じで速度は $\mathbf{20.000000}$ と $\mathbf{3.000000}$（計算 3.5）：一点は速度を決めない。
8. 競技場は $\mathbf{2}$ 対 $\mathbf{1}$、半分で $\mathbf{0.5}$ 格子（観察 3.8）：本稿の芯。
9. 分離子は「何を仮定すると戻るか」（観察 4.1）：四つで違う。
10. 四つは二つと一つと一つに分かれる（観察 4.3）：「四つとも別」ではない。

結び：ゼノンの四つの逆理は、しばしば「微積分で解決した」と一括りにされる。級数が落とすのは二つである——二分法は等比級数の収束で落ち、50 項で $\mathbf{0.999999999999999}$、1 との差は $\mathbf{8.882 \times 10^{-16}}$ である。10 項ではまだ $\mathbf{9.766 \times 10^{-4}}$ 離れているので、検査は項数に反応している。アキレスは、亀のいた場所へ着く時刻を無限に足した和が、閉じた式 $d/(v_1 - v_2) = \mathbf{11.111111111111}$ 秒に $\mathbf{1.776 \times 10^{-15}}$ の差で一致することで落ちる。距離の側からも、$\mathbf{111.111111111}$ 対 $\mathbf{111.111111111}$ で突き合わせた。ただし 20 段と 60 段で差が変わらない。20 段で浮動小数の刻みに達しており、数学の収束と計算の収束は別の場所で止まる。三つ目には別の道具が要る——飛ぶ矢は差分商の極限で落ち、$\mathbf{20.000000000000}$ に収束する。h を小さくしすぎるとかえって悪くなり、$h = 10^{-7}$ では $\mathbf{19.999999985032}$ になる。打ち切りの誤差は減るが引き算の桁落ちが増えるからで、極限は数学の操作であって計算の手続きではない。$h = 0$ では分子も分母も 0 になって値を持たない。同じ $t = 2$ で位置 $\mathbf{20.000000}$ を通る二つの運動が、速度 $\mathbf{20.000000}$ と $\mathbf{3.000000}$ を持つ。ゼノンの「一点で

は静止している」は正しく、誤りはそこから運動が無いと結論する段にある。四つ目は微積分では落ちない——空間を格子とすると、一刻みで静止列に対して **1** 格子、逆向きの相手に対して **2** 格子動く。半分の時刻では相手側が **1.0** 格子で整数のまま、静止列に対しては **0.5** 格子という、格子が最小単位だという仮定と両立しない値を要求する。連続にすれば **0.5** は書ける。この逆理を落とすのは級数でも微分でもなく、空間を連続と置くことである。級数も微分も連続な空間の上で書かれており、競技場はその前提そのものを問うている。分離子は戻し方である——級数が発散すれば二つが戻り、極限を認めなければ三つ目が戻り、空間を離散と置けば四つ目が戻る。論文**300** の判定でいえば、「無限に関する困難」という一語に括られながら、動かすものが違う。別根の主張は「四つとも別」ではなく、「二つと一つと一つに分かれる」である。論文**213** が「戻ってくる」という動詞に別根を見たのと同じ形で、ここでは「解決した」という動詞に別根がある。論文**518** とは対照で、あちらでは食い違いが $\mathbf{1/(n+2)}$ で縮んだが、こちらでは最後まで合流しない。論文**481** の言い方でいえば、「ゼノンは解決した」を疑う行き先は、級数の収束・極限の存在・空間の連続性の三つに分かれる。正直に言えば——ゼノンが何を意図したかは言っていない。原文は残らず、アリストテレスとシンプリキオスを通した伝承しか手元にない。競技場の逆理は伝承の形が複数あり、本稿は相対運動として読む形だけを扱った。空間が実際に格子だとも言っていない。言えるのは、伝承された四つの形に対して効く道具が四つに分かれる、そこまでである。

参考文献

1. Aristotle. *Physics*, Book VI. (English translation: Hardie, R. P., & Gaye, R. K., Oxford, 1930.)
2. Grünbaum, A. (1967). *Modern Science and Zeno's Paradoxes*. Wesleyan University Press.
3. Huggett, N. (2019). Zeno's Paradoxes. In *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Stanford University.
4. Salmon, W. C. (Ed.) (2001). *Zeno's Paradoxes*. Hackett.
5. 山岸勇輝 (2026). 『「戻ってくる」には別根がある』[論文213]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22119380
6. 山岸勇輝 (2026). 『三百本目の点呼 ── 同根か別根かは、判定できる』[論文300]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22171914
7. 山岸勇輝 (2026). 『「法則が破れた」は、どの仮定へも落とせる』[論文481]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22733927
8. 山岸勇輝 (2026). 『場を縦と横に分けるのは場の性質だが、$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ に分けるのは座標の性質である』[論文517]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22862396
9. 山岸勇輝 (2026). 『事前分布による食い違いには期限があり、許容差の逆数から **1** を引いた回数で終わる』[論文518]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22862439

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)