ν^2 と T^3 と固有値の個数は、同じ一つの数え上げである

— 辺 π の立方体の固有値を数えると、ワイルの主要項は **2.834** パーセント外れ、境界項を足すと **0.022** パーセントに縮む — 同じ数え上げにプランクの重みを掛けると比熱の指数は **3.000000**、二次元では **2.000000** になる — [論文521]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— *From thinking to syncing.* —

要旨

黒体放射の ν^2、太鼓の固有値の個数、低温比熱の T^3 は、別々の分野の別々の法則だと思われている。本稿が示すのは、三つが同じ一つの数え上げであり、違うのは掛ける重みだけであることである。新しい定理も法則も主張しない。 第一に、辺 π の立方体の固有値を実際に数えると、$k = 80$ で **260485** 個である——ワイルの主要項 **268082.573** とは **2.834** パーセント違う（第2節）。 第二に、境界項を足すと **260542.751** になり、ずれは **0.022** パーセントに縮む——$k = 10$ でも **410** 対 **405.789** で **1.038** パーセントに収まる（第2節）。 第三に、同じ数え上げに偏光 **2** を掛けると $8\pi V\nu^3/(3c^3)$ が出る——数え上げの対数の傾きを測ると **3.000000000000** であり、ν^2 の状態密度はその微分である（第3節）。 第四に、これが本稿の芯である。同じ数え上げにプランクの重みを掛けて比熱の指数を測ると **3.000000** になる——T^3 の **3** は熱力学から出た数ではなく、数えている空間の次元である（第3節）。 第五に、二次元で同じことをすると指数は **2.000000** になる——境目の反対側。**3** は定数ではない（第3節）。 第六に、分離子は重みである——重み **1** ならワイルの法則、重み $h\nu/(e^{h\nu/kT}-1)$ ならプランク、その温度微分ならデバイ。数え上げの側は一度も変わらない（第4節）。 キーワード：ワイルの法則、固有値の数え上げ、レイリー＝ジーンズの式、デバイの T3 則、状態密度。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——ワイルの法則も、レイリー＝ジーンズの式も、デバイの模型も標準的である。漸近展開を新しく出さない——境界項より先の項（曲率の項）には立ち入らない。本稿が使うのは主要項と第二項だけである。ワイルの法則の証明を与えない——本稿がするのは、辺 π の立方体という一つの場合で実際に数えて突き合わせることである。デバイ模型の当否を論じない——実在の固体で T^3 がどの温度域まで成り立つかは主題ではない。歴史の先後を裁定しない——誰が最初に問うたかではなく、数え上げが同一であることだけを言う。「同じ法則だ」とは書かない——共有しているのは数え上げであって、掛ける重みは三つとも違う。既刊との関係：論文204 は固有値を数えたときのべきが次元の半分だと示した——本稿はその数え上げを、放射と比熱の側から見る。論文265 は低温比熱で二つの模型を分けたのが量子化ではなく状態密度だと示した——あちらは「何が分けたか」を問い、本稿は「何が共有されているか」を問う。論文222 は太陽が緑にも橙にも赤外にも輝いていると示した——ピークが三つに割れるのは重みの側の事情であり、数え上げの側は一つである。論文299 は太鼓に音程が無いのは境界のせいだと示した——本稿の第二項がその境界である。論文102 はスペクトルから形を聴く問いを扱った——数え上げの主要項は体積しか見ておらず、形を聴くには第二項から先が要る。論文482 は同じ積分の上と下で臨界次元が別の数になると示した——本稿の指数 3 と 2 も次元から出る。論文300 は同根か別根かが判定できると示した——本稿は第56 定義の「恒等性を保つ対応」を使う。加えたのは、立方体の固有値を実際に数えて主要項と突き合わせたこと、境界項を足すと $k = 10$ でも 1.038 パーセントに収まると測ったこと、比熱の指数を仮定せずに対数の傾きとして測ったこと、二次元でやり直して 2.000000 を得たこと、分離子を重みに置いたことである。

1. 記法と問い

設定：辺 π の立方体でディリクレ条件を課すと、固有値は

$$\lambda = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2, \qquad n_i \in \{1, 2, 3, \dots\}$$

である。$k = \sqrt{\lambda}$ 以下の固有値の個数を $N(k)$ と書く。

ワイルの法則：$N(k)$ の主要項は体積だけで決まる。

$$N(k) \;\simeq\; \frac{V}{6\pi^2} k^3 - \frac{S}{16\pi} k^2 + \cdots$$

ここで V は体積、S は表面積である。辺 π の立方体なら $V = \pi^3$、$S = 6\pi^2$ である。

> **観察 1.1**
>
> 同じ $N(k)$ が、三つの分野で別の名前を持っている。放射では振動モードの数、固体では格子振動のモードの数、数学では固有値の数——数えている対象は同じ格子点である。

> **観察 1.2**
>
> 違うのは、数えたあとに何を掛けるかである。数学は何も掛けない。放射は一モードあたりのエネルギーを掛ける。比熱はそれをさらに温度で微分する——三段の重ねであって、三つの独立な法則ではない。

問い：数え上げが共有されているなら、T^3 の 3 はどこから来るのか。

2. 数え上げは一つである

計算 2.1：閉じた式を使わず、格子点を実際に数える。$n_i \geq 1$ で $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 \leq k^2$ を満たす組を数え上げた。

k	実際に数えた	主要項だけ	比
10	**410**	523.599	0.783042
20	**3719**	4188.790	0.887846
40	**31616**	33510.322	0.943471
80	**260485**	268082.573	0.971660

> **観察 2.2**
>
> 主要項だけでは、$k = 80$ でもまだ **2.834** パーセント外れている。$k = 10$ では **21.696** パーセント——「漸近的に正しい」は「もう合っている」とは違う。

計算 2.3：第二項 $-Sk^2/(16\pi)$ を足す。

k	実際に数えた	二項まで	比
10	**410**	405.789	1.010377
20	**3719**	3717.551	1.000390
40	**31616**	31625.366	0.999704
80	**260485**	260542.751	0.999778

> **観察 2.4**
>
> 第二項を足すと、$k = 10$ で **21.696** パーセントが **1.038** パーセントになる。$k = 80$ では **2.834** パーセントが **0.022** パーセント——二桁縮む。境界項は飾りではない。

> **観察 2.5**
>
> 第二項の符号は負である。ディリクレ条件は端で場を零にするので、モードは体積から期待されるより少ない——論文299 が「音程は境界が決める」と書いた境界が、ここでは数の減り分として出ている。

> **観察 2.6**
>
> 主要項は体積しか見ていない。だから体積の等しい別の形を入れても、主要項は同じ値を返す——論文 102 の「形は聴こえるか」という問いが第二項から先の話になるのは、このためである。

3. 重みだけが違う

計算 3.1：同じ数え上げに偏光の 2 を掛け、波数を振動数に直す。

$$N(\nu) = 2 \cdot \frac{V}{6\pi^2}\left(\frac{2\pi\nu}{c}\right)^3$$

これは $8\pi V\nu^3/(3c^3)$ に 14 桁で一致する。対数の傾きを測ると **3.000000000000** である。

> **観察 3.2**
>
> 状態密度はその微分にすぎない。$dN/d\nu = 3N/\nu = 8\pi V\nu^2/c^3$——レイリー＝ジーンズの ν^2 は、ν^3 の数え上げを一回微分しただけである。新しい物理は一つも入っていない。

計算 3.3：同じ数え上げにプランクの重みを掛け、温度で微分して比熱を出す。低温での指数を、仮定せずに対数の傾きとして測る。

量	値
デバイ積分 $\int_0^\infty x^4 e^x/(e^x-1)^2 dx$	**25.97575761**
独立に知られた $4\pi^4/15$	**25.97575761**
低温の係数 $12\pi^4/5$	**233.781818**
測った指数（三次元）	**3.000000**
測った指数（二次元）	**2.000000**

> **観察 3.4**
>
> これが本稿の芯である。T^3 の **3** は、熱力学の側から出た数ではない——数え上げが k^3 だったから **3** なのであって、二次元で同じ手続きを踏めば **2.000000** が出る。

> **観察 3.5**
>
> 指数は仮定していない。$T/\Theta = 0.01$ と 0.02 で比熱を計算し、対数の傾きとして測った——T^3 を前提に置いて **3** を取り出したのではない。もし数え上げが違っていれば、この傾きは **3** から外れる。

> **観察 3.6**
>
> 重みは三つとも違う。ワイルは重み **1**、レイリー＝ジーンズは kT、プランクは $h\nu/(e^{h\nu/kT}-1)$——同じ数え上げに何を掛けるかだけが分かれている。

計算 3.7：プランクの重みとレイリー＝ジーンズの重みの比 $x/(e^x-1)$ を測る（$x = h\nu/kT$）。

$h\nu/kT$	比
0.01	**0.995008**
0.10	0.950833
1.00	**0.581977**
5.00	0.033918
10.00	$\mathbf{4.540199 \times 10^{-4}}$

> **観察 3.8**
>
> 低振動数側では重みの違いが消える。$h\nu/kT = 0.01$ で **0.995008**——ここでは二つの理論が同じ答を返す。破局が見えるのは高振動数側で、$h\nu/kT = 10$ では $\mathbf{4.540199 \times 10^{-4}}$ まで落ちる。

4. 分離子

> **観察 4.1**
>
> 分離子は重みである。数え上げを変えずに重みだけを取り替えると、ワイル・レイリー＝ジーンズ・プランク・デバイが順に出る——逆に、重みを固定して数え上げを変える（次元を変える）と、指数が **3.000000** から **2.000000** へ動く。

> **観察 4.2**
>
> 論文300 の第二基準（恒等性を保つ対応）を満たす。モードの数と固有値の数のあいだには、$\lambda = k^2$ という写像が一本あり、両側の数え上げがその写像で移り合う——数値が一致するだけではない。対応が式で書ける。

観察 4.3

数値の一致だけなら証拠にならない。論文56 の定義4.1 が言うとおり、同じ数が出ることは同根の証拠ではない——本稿が示したのは、片方の数え上げの手続きをもう片方の手続きに書き換えられることである。

観察 4.4

どこまでを共有と呼ぶかには柵がある。共有されているのは $N(k)$ の作り方であって、境界条件も、偏光の 2 も、デバイの切断振動数も共有されていない——偏光の 2 は電磁場に固有の数で、格子振動では縦波が入って 3 になる。

観察 4.5

論文265 との向きの違い。あちらは「二つの模型を分けたのは状態密度だ」と、違いの所在を示した——本稿は同じ状態密度が三つの分野で共有されていることを示す。分ける側と束ねる側で、同じ量が二度働いている。

観察 4.6

言わないこと。実在の固体で T^3 がどこまで成り立つかは扱わない——デバイ模型そのものが近似であり、本稿はその近似の内側で指数を測っただけである。

5. 点呼と結び

1. $k = 80$ で実際に数えると 260485 個（計算 2.1）：主要項は 268082.573。
2. 主要項だけでは 2.834 パーセント外れる（観察 2.2）：$k = 10$ では 21.696 パーセント。
3. 境界項を足すと 0.022 パーセント（計算 2.3）：$k = 10$ でも 1.038 パーセント。
4. 第二項の符号は負（観察 2.5）：ディリクレ条件が数を減らす。
5. 数え上げの傾きは 3.000000000000（計算 3.1）：ν^2 はその微分。
6. デバイ積分 25.97575761（計算 3.3）：独立に知られた $4\pi^4/15$ と一致。
7. 測った指数は 3.000000（観察 3.4）：本稿の芯。

8. 二次元では $\mathbf{2.000000}$（観察 3.4）：$\mathbf{3}$ は定数ではない。
9. 重みの比は 0.01 で $\mathbf{0.995008}$、10 で $\mathbf{4.540199 \times 10^{-4}}$（計算 3.7）：境目の両側。
10. 分離子は重み（観察 4.1）：数え上げではない。
11. 偏光の $\mathbf{2}$ は共有されない（観察 4.4）：格子振動では $\mathbf{3}$。

結び：黒体放射の ν^2 と、太鼓の固有値の個数と、低温比熱の T^3 は、別々の分野の別々の法則に見える。数え上げは一つである——辺 π の立方体の固有値を閉じた式に頼らず実際に数えると、$k = 80$ で $\mathbf{260485}$ 個であり、ワイルの主要項 268082.573 とは $\mathbf{2.834}$ パーセント違う。第二項 $-Sk^2/(16\pi)$ を足すと 260542.751 になり、ずれは $\mathbf{0.022}$ パーセントに縮む。$k = 10$ でも 21.696 パーセントが $\mathbf{1.038}$ パーセントになる。第二項の符号は負で、ディリクレ条件が端でモードを削っている。論文299 が「音程は境界が決める」と書いた境界が、ここでは数の減り分として現れる。主要項は体積しか見ていないから、体積の等しい別の形を入れても同じ値を返す。論文102 の問いが第二項から先の話になるのは、このためである。違うのは重みだけである——同じ数え上げに偏光の 2 を掛けると $8\pi V\nu^3/(3c^3)$ になり、対数の傾きは $\mathbf{3.000000000000}$ である。レイリー＝ジーンズの ν^2 はこれを一回微分しただけで、新しい物理は入っていない。同じ数え上げにプランクの重みを掛けて温度で微分し、低温の指数を仮定せずに測ると $\mathbf{3.000000}$ が出る。デバイ積分は $\mathbf{25.97575761}$ で、独立に知られた $4\pi^4/15$ と一致し、低温の係数は $12\pi^4/5 = \mathbf{233.781818}$ である。二次元で同じ手続きを踏むと指数は $\mathbf{2.000000}$ になる。T^3 の 3 は熱力学から出た数ではなく、数えている空間の次元である。分離子は重みである——重み 1 ならワイル、kT ならレイリー＝ジーンズ、$h\nu/(e^{h\nu/kT}-1)$ ならプランク、その温度微分ならデバイ。重みの比 $x/(e^x-1)$ は $x = 0.01$ で $\mathbf{0.995008}$、$x = 10$ で $\mathbf{4.540199 \times 10^{-4}}$ で、低振動数側では二つの理論が同じ答を返し、高振動数側で分かれる。論文300 の第二基準でいえば、$\lambda = k^2$ という対応が式で書けるので、これは数値の一致ではなく同根の証拠である。論文265 は同じ状態密度を「二つの模型を分けたもの」として使った。分ける側と束ねる側で、同じ量が二度働いている。正直に言えば——扱ったのは辺 π の立方体という一つの場合だけであり、ワイルの法則を証明したのではない。境界項より先の曲率の項には触れていない。共有されているのは数え上げの作り方であって、偏光の 2 も、デバイの切断振動数も共有されていない。格子振動では縦波が入って 3 になる。実在の固体で T^3 がどの温度域まで成り立つかも扱っていない。言えるのは、三つの法則が同じ格子点の数え上げの上に乗っており、指数はその数え上げの次元から出ている、そこまでである。

参考文献

1. Debye, P. (1912). *Zur Theorie der spezifischen Warmen*. Annalen der Physik.
2. Jeans, J. H. (1905). *On the Partition of Energy between Matter and Aether*. Philosophical Magazine.
3. Kac, M. (1966). *Can One Hear the Shape of a Drum?* American Mathematical Monthly.
4. Rayleigh, Lord (1900). *Remarks upon the Law of Complete Radiation*. Philosophical Magazine.

5. Weyl, H. (1911). *Uber die asymptotische Verteilung der Eigenwerte*. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Gottingen.
6. 山岸勇輝 (2026).『**4π** パッチの構造的考察』[論文56]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21597500
7. 山岸勇輝 (2026).『スペクトルから形を聴く』[論文102]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21836735
8. 山岸勇輝 (2026).『固有値を数えたときのべきは、次元の半分である』[論文204]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22110032
9. 山岸勇輝 (2026).『太陽は、緑にも橙にも赤外にも輝いている』[論文222]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22120199
10. 山岸勇輝 (2026).『低温比熱で二つの模型を分けたのは、量子化ではなく状態密度である』[論文265]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22169749
11. 山岸勇輝 (2026).『太鼓に音程が無いのは、境界のせいであって方程式のせいではない』[論文299]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22171877
12. 山岸勇輝 (2026).『三百本目の点呼 ── 同根か別根かは、判定できる』[論文300]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22171914
13. 山岸勇輝 (2026).『「臨界次元」という同じ語が、上と下で別の数を指している』[論文482]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22759625

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)