

山岸・ボルン則幾何構造理論

— 第3版：指数2は二つの別の根から来ており、 4π はここでは消えずに残る — [論文53]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月 (第3版)

— From thinking to syncing. —

要旨

1926年にマックス・ボルンが公理として置いた確率解釈 $P = |\psi|^2$ に対し、その指数が2でなければならない理由を二つの経路から論じる。第一に、ユニタリ発展の下で任意の初期状態に対して保存される冪汎関数は $\int |\psi|^2$ のみである（定理2.1・記号計算で検証済）。第二に、3次元における外向き球面波 $\psi = Ae^{ikr}/r$ の確率流束が半径によらず一定となる条件は $|\psi|^2 \propto r^{-2}$ であり、これは論文01の $n=2$ 唯一性定理と同一の代数条件である（定理3.1）。第3版が加えるのは、この二つの「2」の住所である。第一に、二つの経路は別の根から来ている。定理2.1の2は力学（ユニタリ性）が決めており、定理3.1の2は幾何（球面の面積が r^2 ）が決めてい。そして両者は独立に $n=2$ を指す。一致は偶然ではないが、同一でもない——第3版はこの区別を明示する（観察3.4）。第二に、定理3.1が排除する「代替」は、そもそも存在しない。 $|\psi|^2 \propto r^{-n}$ に対応する $\psi = Ae^{ikr}r^{-n/2}$ が自由シュレーディンガー方程式を満たすのは $n=2$ に限られる（記号計算で確認済）。論文01の $\rho \propto r^{-n}$ はどの n も可能な分布であるのに対し、こちらの族は $n=2$ 以外に解を持たない。代数は同一であり、代数が選んでいる対象が違う（観察3.5）。第三に、 4π はここでは消えない。論文51は球殻定理において 4π が両辺に現れて完全に相殺することを示した。本稿の $\Phi = 4\pi(\hbar k/m)|A|^2$ では 4π は球面の面積からただ一度しか現れず、相殺する相手がないため残る。論文52の 4π はそもそも立体角ですらなかった。同じ記号に三つの結末がある（観察3.6）。本稿はボルン則の完全導出を主張しない。グリーソンの定理をはじめとする先行研究との関係を明示したうえで、指数2の構造的必然性とその出所を論じる。

本稿の位置づけ：用いた道具はいずれも標準的である（ユニタリ性による $\int |\psi|^2$ の保存、確率流密度 $\mathbf{j} = (\hbar/m)\text{Im}(\psi^*\nabla\psi)$ 、外向き球面波）。新しい物理法則も、新しい定理もない。本稿が行うのは、指数2がどこから来ているかを分けて書くことである。第5節（宇宙OSの読み）は第3層（非科学）であり、第2～4節はそれに一切依存しない。

1. 序論：なぜ「2乗」なのか

量子力学におけるボルン則

$$P(x) d^3x = |\psi(x)|^2 d^3x$$

は、標準的定式化において経験的公理として置かれる。長年問われてきたのは次の一点である：なぜ確率は振幅の2乗なのか。1乗でも3乗でもない理由は何か。

本稿は、この問いに対し二つの構造的回答を与える。いずれも既存の量子力学の枠内で検証可能であり、追加の仮定を要しない。そして第3版は、その二つが同じ理由で2になっているのではないことを示す。

2. 第一の経路：ユニタリ性による指数の一意化

定理 2.1 (保存量としての指数一意性)

シュレーディンガー方程式のユニタリ発展 $|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle$, $U^\dagger U = I$ の下で、汎関数

$$N_n[\psi] \equiv \int |\psi(x)|^n d^3x$$

が任意の初期状態に対して時間不変となるのは $n = 2$ の場合に限られる。

証明 $n = 2$ の場合、内積の保存より

$$N_2[\psi(t)] = \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = \langle \psi(0) | U^\dagger U | \psi(0) \rangle = N_2[\psi(0)]$$

であり、ユニタリ性から直ちに保存する。 $n \neq 2$ の場合は反例で十分である。自由粒子のガウス波束は時間とともに幅 $\sigma(t)$ が単調増大し、規格化された密度は $|\psi|^2 = (\pi\sigma^2)^{-3/2} \exp(-r^2/\sigma^2)$ と書ける。このとき

$$N_n[\psi] \propto \sigma^{3(1-n/2)}$$

であり、 $n \neq 2$ のとき指数 $3(1-n/2) \neq 0$ となって σ に依存する。波束が広がる以上、 N_n は時間変化する（記号計算で検証済： $n = 1, 3/2, 2, 5/2, 3, 4$ に対し σ の冪はそれぞれ $3/2, 3/4, 0, -3/4, -3/2, -3$ ）。

系 2.2

確率の全和は保存されねばならない。定理2.1より、この要請を満たす振幅の冪は $n = 2$ のみである。

観察 2.3 (第3版：この定理の効き所は「任意の」という語にある)

定理2.1 の力は、ある一つの状態ではなくすべての状態を要求する点に宿っている。実際、定常状態（エネルギー固有状態）では $|\psi(x,t)|$ が時間に依らないから、 N_n はどの n に対しても保存する。したがって単一の状態を見ているかぎり、指数は一意化されない。

一意化しているのは波束が広がるという力学である。 σ が動くからこそ $\sigma^{3(1-n/2)}$ が動き、 $n=2$ だけが残る。この 2 の住所は幾何ではなく力学である——第3節の 2 と区別すべき理由がここにある（観察3.4）。

注記 2.4 (本定理の適用範囲 — 重要)

定理2.1には二重の限定が付く。

第一に、本定理は冪汎関数の族 $\int |\psi|^n d^3x$ の内部での一意化である。確率密度が $|\psi|$ の冪であるとあらかじめ仮定した上で、その冪を絞り込んでいる。 $|\psi|$ の冪でない汎関数は候補から排除されていない。グリーソンの定理が本稿より強いのは、まさにこの仮定を必要としないためである（第4節）。

第二に、「なぜ $|\psi|^2$ が確率なのか」には答えない。保存する量が確率として解釈されるべき理由は測定理論の問題であり、本定理の外にある。

3. 第二の経路：確率流束と $n=2$ 唯一性定理の一致

定理 3.1 (球面確率流束と $n=2$ 唯一性の同一性)

3次元空間における外向き球面波

$$\psi(\mathbf{r}) = A \frac{e^{ikr}}{r}$$

に対し、半径 r の球面を貫く確率流束が r に依存せず一定となる条件は $|\psi|^2 \propto r^{-2}$ であり、これは論文 01 の $n=2$ 唯一性定理における条件と同一の代数条件である。

証明 確率流束は確率密度そのものではなく、確率流密度

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{m} \text{Im}(\psi^* \nabla \psi)$$

を面積分したものである。球面波に対してこれを計算すると

$$j_r = \frac{\hbar}{m} \text{Im}(\psi^* \partial_r \psi) = \frac{\hbar k}{m} \cdot \frac{|A|^2}{r^2}$$

となる（記号計算で検証済）。したがって半径 r の球面を貫く全流束は、面積要素 $dA = r^2 d\Omega$ を用いて

$$\Phi(r) = \oint_{S^2} j_r r^2 d\Omega = \frac{\hbar k}{m} \cdot \frac{|A|^2}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = 4\pi \frac{\hbar k}{m} |A|^2 \quad (8)$$

であり、 r に依存しない。面積要素の r^2 が j_r の r^{-2} を相殺していることが本質である。この球面波では j_r が $|\psi|^2$ に比例し、その比例定数 $\hbar k/m$ （群速度）が r に依らない。したがって r 依存性の議論は $|\psi|^2$ についてそのまま成立する。 $|\psi|^2 \propto r^{-n}$ と置けば $j_r \propto r^{-n}$ であり

$$\Phi(r) \propto 4\pi r^{2-n}$$

となって、 Φ が r に依存しない必要十分条件は $n = 2$ である。これは論文01（球対称密度分布における $n = 2$ 唯一性定理）で球殻質量増加率 $dm/dr = 4\pi r^{2-n}$ が定数となる条件として導出されたものと同一の代数条件である。

【第2版の訂正・据え置き】：初版は $\int_{S^2} |\psi|^2 r^2 d\Omega$ を「確率流束」と書いていた。この量は流束ではない——次元は $[L^{-1}]$ であって確率／時間ではない。結論は変わらないが、 $|\psi|^2$ と確率流 $\mathbf{j}$ を同一視していた点を上記のとおり正した。

系 3.2 (二つの $n = 2$ の対応)

定理3.1は、本理論体系における二つの言明が同じ代数条件に帰着することを示す：

文脈	保存される量	条件
論文01（質量分布）	球殻あたりの質量 dm/dr	$\rho \propto r^{-2}$
本稿（量子確率）	球面を貫く確率流束 Φ	$ \psi ^2 \propto r^{-2}$

いずれも「3次元球面の面積が r^2 に比例する」という単一の幾何学的事実から従う。

注記 3.3

定理3.1が示すのは、ボルン則を前提としたときに確率密度が3次元で r^{-2} 則に従うこと、およびその条件が論文01と同型であることである。これはボルン則の導出ではなく、ボルン則と3次元幾何の整合性の証明である。

3.1 【第3版】二つの 2 の住所

観察 3.4 (力学の 2 と幾何の 2)

第2節と第3節はどちらも $n = 2$ に至るが、到達させている当のものが違う。

何が 2 を決めているか		3 次元性への依存
定理2.1 (ユニタリ性)	力学：波束が拡がること	なし (d 次元でも $n = 2$)
定理3.1 (流束保存)	幾何：球面の面積が r^2	あり (d 次元なら $n = d - 1$)

決定的な区別は右列にある。定理2.1 の 2 は空間次元を変えても 2 のままである—— d 次元のガウス波束では $N_n \propto \sigma^{d(1-n/2)}$ となり、指数が消えるのは d によらず $n = 2$ である。一方定理3.1 の 2 は $d = 3$ に固有であり、 d 次元では $n = d - 1$ になる (論文01・論文114)。

したがって両者が 3 次元で一致するのは、 $d - 1 = 2$ という等式が成り立つからにすぎない。一致は事実だが、同一ではない。4 次元空間では定理2.1 は $n = 2$ を、定理3.1 は $n = 3$ を指し、二つは分かれる。これが二つの根を分離する反例である。

観察 3.5 (定理3.1 が排除する代替は、そもそも存在しない)

定理3.1 は $|\psi|^2 \propto r^{-n}$ の族の中で $n = 2$ を選ぶ。しかしこの族は、自由粒子の状態としては $n = 2$ 以外に存在しない。

実際、 $\psi = Ae^{ikr}r^{-a}$ を自由シュレーディンガー方程式 (動径ヘルムホルツ簡約 $u = r\psi$ 、 $u'' + k^2u = 0$) に入れると

$$u'' + k^2u = r^{-a-1} (a^2 - a - 2ikr(a - 1))e^{ikr}$$

となり、これがすべての r で消えるのは $a = 1$ 、すなわち $n = 2a = 2$ に限られる (記号計算で確認済)。

これは論文01 との重要な差である。論文01 において $\rho \propto r^{-n}$ はどの n も実在しうる密度分布であり、 $n = 2$ の選択は本物の代替の中からの選択である。本稿の族はそうではない——シュレーディンガー方程式が先に $n = 2$ を強制しており、流束の議論はそれを確認している。

よって系3.2 の表は、代数条件が同一であることを示すが、二つの言明が同じ意味で「唯一性定理」であることは示さない。論文01 は選んでおり、本稿は照合している。代数は同一、代数が働きかけている対象が違う。

観察 3.6 (第3版： 4π はここでは消えない)

体系は 4π を含む式を多数抱えている。直近の三編で、同じ記号が三つの異なる結末をたどった：

論文	4π の出所	結末
51 (球殻定理)	球の面積 およびガウス則の規格化	両辺で相殺し、答えに残らない
52 (ホーキング温度)	ユークリッド周期 2π の 2 倍	立体角ですらない
本稿 (確率流束)	球の面積のみ	相殺する相手がなく、残る

式(8) の 4π は立体角 Ω_2 という事実であり、規約は掛かっていない。そして論文51 と違い、ここには打ち消し相手がいない——ガウスの法則のような、右辺に同じ 4π を持つ規格化が存在しないからである。 4π が残るか消えるかは、その式に 4π が何度現れるかで決まる。

したがって系3.2 の「立体角 4π が両者に共通して現れる」という言い方は、住所まで書いて初めて検査可能になる (論文17)。共通しているのは面積要素 $r^2 d\Omega$ の Ω を全立体角にわたって積分したことであって、 4π という数の一致ではない。

4. 先行研究との関係と本稿の射程

訂正記録 4.1 (初版・据え置き) : 本論文の初版は、波動関数の絶対値 $|\psi|$ を「有効変位半径 r 」と同一視し、球殻表面積 $4\pi r^2 = 4\pi |\psi|^2$ からボルン則を導出したと主張していた。この同一視は次元的に整合しないため撤回済である。3次元における規格化条件より $|\psi|^2$ の次元は $[L]^{-3}$ 、したがって $|\psi|$ の次元は $[L]^{-3/2}$ であり、長さ $[L]$ と同一視することはできない。初版の直観のうち保持可能な部分は定理3.1として厳密化された。

4.1 ボルン則導出の先行研究

- グリーソンの定理 (Gleason, 1957) : 次元3以上の可分ヒルベルト空間において、射影束上の任意の確率測度は $\mu(P) = \text{Tr}(\rho P)$ の形に限られる。ヒルベルト空間構造と非文脈性を仮定すれば、ボルン則は数学的に強制される。現在も最も強力な結果である。

- 決定理論的導出 (Deutsch, 1999; Wallace, 2007) : エヴェレット解釈の枠内で、合理的行為者の選好公理からボルン則を導く。
- エンバリアンス (Zurek, 2005) : 環境ともつれた系の対称性からボルン則を導出する。
- 操作論的導出 (Masanes, Galley & Müller, 2019) : 測定過程に関する操作的公理群からボルン則を一意に決定する。

4.2 本稿の主張範囲

本稿はボルン則の完全導出を主張しない。グリーソンの定理が示すとおり、ボルン則の数学的必然性はヒルベルト空間構造から既に強く制約されており、本稿がそれを超える導出を与えるものではない。

本稿が主張するのは以下に限られる：

1. 冪汎関数の族の内部で、使用可能な指数がユニタリ性により $n = 2$ に一意化されること (定理2.1)。ただし確率密度が $|\psi|$ の冪であることを仮定しており、その点でグリーソンの定理より弱い (注記2.4)。また一意化しているのはすべての状態を要求することであって、単一の状態ではない (観察2.3)。
2. ボルン則の下での確率流束保存条件が、論文01 の $n = 2$ 唯一性定理と同一の代数条件であること (定理3.1)。ただし両者が同じ意味で「唯一性」であるわけではない (観察3.5)。
3. 【第3版】この二つの 2 は別の根から来ており、4次元では分かれること (観察3.4)。
4. 【第3版】 4π が残るか消えるかは、その式に 4π が何度現れるかで決まること (観察3.6)。

本稿が示さないもの (明示) : (i) 確率密度が $|\psi|$ の冪であること自体 (定理2.1の仮定)、(ii) 保存量が確率として解釈されるべき理由 (測定理論の問題)、(iii) ボルン則の導出——定理3.1はボルン則を前提とした上での整合性の確認である (注記3.3)、(iv) 二つの経路の一致が偶然を超えた必然であること——一致するのは $d = 3$ に限られる (観察3.4)。

5. 宇宙OSにおける解釈 — 第3層（非科学）

以下は解釈であり、定理ではない。第3層（非科学）として隔離する。前節までの内容は、以下をまったく用いない。物理的測定器は常に2次元境界（検出面）上で系と相互作用する。定理3.1 が示すとおり、その2次元面を貫く流束は面積要素 $r^2 d\Omega$ を通じて確率密度と結合し、立体角にわたる総和が保存量となる。宇宙OSの描像では、これは3次元空間に分布するデータが2次元の検出面へ射影される際の帯域配分として読むことができる。【第3版の訂正：論文41 の記法を「演算子」と呼んでいた】：第2版は本節で「論文41 における2次元射影演算子 $\mathcal{P}_{2D}$ の議論」と書いていた。論文41 第3版は $\mathcal{P}_{2D}$ を射影演算子ではないと明記している——冪等性 $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$ を満たさず、 δ 関数は状態空間の元ですらないため、定理でも導出でもなく記法上の便宜である。第3版はこれを「記法 $\mathcal{P}_{2D}$ 」と呼び、演算子とは呼ばない。撤回済の構成物を引用によって呼び戻さないための訂正である。本稿は、この読み替えがボルン則の説明となることを主張しない。定理3.1 が確立するのは、ボルン則と3次元球面幾何の整合性であって、前者を後者から導出したわけではない。

6. 結論

本稿では以下を確立した。

- ユニタリ発展の下で任意の初期状態に対して保存される冪汎関数 $\int |\psi|^n$ は $n = 2$ に限られること（定理2.1、系2.2・記号計算で検証済）。一意化しているのは「任意の」という要求であり、定常状態だけを見ればどの n も保存する（観察2.3）。
- 3次元球面波の確率流束保存条件 $|\psi|^2 \propto r^{-2}$ が、論文01 の $n = 2$ 唯一性定理と同一の代数条件であること（定理3.1、系3.2）。
- 【第3版】二つの 2 は別の根から来ている——定理2.1 の 2 は力学が決める空間次元に依らない。定理3.1 の 2 は幾何が決める d 次元では $n = d - 1$ になる。両者が一致するのは $d - 1 = 2$ が成り立つ3次元に限られ、4次元では 2 と 3 に分かれる（観察3.4）。
- 【第3版】定理3.1 が排除する代替は、自由粒子の状態として存在しない—— $\psi = Ae^{ikr}r^{-n/2}$ が自由シュレーディンガー方程式を満たすのは $n = 2$ のみである（観察3.5・記号計算で確認済）。論文01 は本物の代替の中から選んでおり、本稿は照合している。代数は同一、対象が違う。
- 【第3版】 4π はここでは消えない——式(8) では球の面積から一度しか現れず、相殺する相手がないため残る。論文51 では両辺に現れて消え、論文52 ではそもそも立体角ではなかった。同じ記号に三つの結末がある（観察3.6）。
- 【第3版】第5節の「2次元射影演算子」という呼称を訂正した——論文41 第3版は $\mathcal{P}_{2D}$ を演算子ではなく記法と明記している。

7. グリーソンの定理をはじめとする先行研究に照らし、本稿がボルン則の完全導出を主張するものではないことを明示したこと（第4節）。

結語: ボルン則の指数が2であることには二つの構造的根拠がある。だがそれは一つの理由の二つの言い換えではない。一方は力学が、他方は幾何が決めており、両者が同じ数を指すのは私たちが3次元にいるからである。同じ数を見たときに、まずその住所を問う——本稿が体系に返すのはその一点である。

改訂記録

第3版（2026年8月）で加えたもの

1. 題名は変えず、副題のみ差し替えた：第3版の内容（二つの根と 4π の行方）を副題に置く。主題名はそのまま保つ。
2. 観察3.4 を新設した：定理2.1 の 2 は力学、定理3.1 の 2 は幾何。前者は次元に依らず、後者は d 次元で $n = d - 1$ になる。4次元が二つを分離する反例である。
3. 観察3.5 を新設した： $\psi = Ae^{ikr}r^{-n/2}$ が自由シュレーディンガー方程式を満たすのは $n = 2$ のみ（記号計算で確認）。論文01 との「唯一性」の身分の差を明示した。
4. 観察3.6 を新設した： 4π の三つの結末（論文51＝相殺／論文52＝立体角でない／本稿＝残る）。
5. 観察2.3 を新設した：定常状態ではどの n も保存する。定理2.1 の力は「任意の初期状態」の側にある。
6. 第5節の「2次元射影演算子 $\mathcal{P}_{2D}$ 」を「記法 $\mathcal{P}_{2D}$ 」に訂正した：論文41 第3版が演算子でないと明記しているため。
7. 第5節を第3層として明示的に隔離した。
8. 定理2.1 の反例を記号計算で再検算した： $n = 1, 3/2, 2, 5/2, 3, 4$ に対し σ の冪は $3/2, 3/4, 0, -3/4, -3/2, -3$ 。
9. 参考文献の自己引用に DOI を付し、書式を統一した。

第2版で訂正した点（据え置き）

1. 初版の $r = |\psi|$ という同一視は次元的に整合しないため撤回（訂正記録4.1）。
2. 初版が「確率流束」と呼んでいた $\int_{S^2} |\psi|^2 r^2 d\Omega$ は流束ではない（次元は $[L^{-1}]$ ）。確率流密度 $\mathbf{j}$ を用いる形に正した（定理3.1の証明）。
3. 定理2.1 が冪汎関数の族の内部での一意化であり、グリーソンの定理より弱いことを明示（注記2.4）。

参考文献

1. Born, M. (1926). Zur Quantenmechanik der Stoßvorgänge. Zeitschrift für Physik, 37(12), 863--867.

2. Gleason, A. M. (1957). *Measures on the closed subspaces of a Hilbert space*. Journal of Mathematics and Mechanics, 6(6), 885--893.
3. Deutsch, D. (1999). *Quantum theory of probability and decisions*. Proc. R. Soc. Lond. A, 455(1988), 3129--3137.
4. Zurek, W. H. (2005). *Probabilities from entanglement, Born's rule from envariance*. Physical Review A, 71(5), 052105.
5. Wallace, D. (2007). *Quantum probability from subjective likelihood: Improving on Deutsch's proof of the probability rule*. Studies in History and Philosophy of Modern Physics, 38(2), 311--332.
6. Masanes, L., Galley, T. D., & Müller, M. P. (2019). *The measurement postulates of quantum mechanics are operationally redundant*. Nature Communications, 10, 1361.
7. 山岸勇輝 (2026). **$n = 2$** 唯一性定理 [論文01]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21403186
8. 山岸勇輝 (2026). **8π** は単位の産物である [論文17]、第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21600813
9. 山岸勇輝 (2026). 干渉縞は、指数を覚えていない [論文41]、第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21436048
10. 山岸勇輝 (2026). 山岸・重力多重極集約理論 [論文51]、第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21602935
11. 山岸勇輝 (2026). 山岸・絶対零度待機とホーキング相転移理論 [論文52]、第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21603034
12. 山岸勇輝 (2026). 四次元にいると知っているのは誰か [論文114]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21963544

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)