「$a = b$」が発見であるとき、加わっているのは減る仕事である

— 長さ **24** の釣り合った括弧列は **208012** 本あり、一つずつ数えると **1033411** 手かかるのに、閉じた式なら **36** 手で同じ数が出る — 「$a = a$」ではこの比が **1** のままである — [論文537]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

「$a = a$」は自明で、「$a = b$」は発見でありうる。本稿が示すのは、その違いが認識の問題にとどまらず、減る仕事として数で測れることである。新しい定理も法則も主張しない。 第一に、同じ数に二つの道がある——長さ 24 の釣り合った括弧列は、数え上げでも閉じた式でも 208012 本になる（第2節）。 第二に、これが本稿の芯である。道の長さが違う——数え上げは 1033411 手、閉じた式は 36 手で、28705.9 倍違う（第2節）。 第三に、差は n とともに開く——$n = 4$ で 5.3 倍、$n = 8$ で 288.2 倍、$n = 12$ で 28705.9 倍である（第2節）。 第四に、「$a = a$」ではこの比が動かない——同じ側を二度たどれば 64 手が 64 手のままで、閉じた式に移れば 12 手になる（第3節）。 第五に、減るのは指数と一次の差である——$n = 16$ では返る数が 35357670 に達するのに、閉じた式の手数は 48 手にとどまる（第3節）。 第六に、分離子は、両辺が別の手続きかどうかである——同じ手続きを二度書いても等号は情報を持たない（第4節）。 キーワード：等号、フレーゲの意義と意味、カタラン数、発見、閉じた式。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——カタラン数の閉じた式も、フレーゲの意義と意味の区別も標準的である。フレーゲの解釈をしない——意義と意味の哲学的な議論には立ち入らず、認識価値という一点だけを数に写す。計算量の理論を述べない——手数を数えたのは一つの実装についてであり、下界の議論はしない。意味論を主張しない——等号が何を意味するかではなく、等号を知ると何が減るかだけを見る。歴史の帰属を裁定しない——等号の記号を誰が最初に使ったかという議論には入らない。「情報量」と呼ばない——減る手数はビットではない。同じ語を使うと別の量と混ざる。すべての等号がこうだとは書かない——手続きが二つあるときの話であり、定義としての等号は別である。既刊との関係：論文16 は等号にも別根があると示した——本稿はそのうち「二つの手続きを結ぶ等号」だけを取り出して、価値を手数で測る。論文232 は証明を落とした本から学ぶと等号の身分も落ちると示した——本稿の言い方でいえば、落ちるのは減る仕事の見積もりである。論文260 は同値性が定理でテーゼが定理でないと示した——定理である同値は手続きを結ぶので、手数の差が測れる。論文405 は数値の一致が同根の証拠になるのは全単射があるときだけだと示した——本稿の括弧列とカタラン数のあいだには全単射がある。だから一致が偶然でない。論文300 は同根か別根かが判定できると示した——二つの手続きは「道筋」の基準では別根で、「対応」の基準では同根である。加えたのは、同じ数に至る二つの手続きの手数を実際に数えたこと、比が **5.3** 倍から **28705.9** 倍まで開くと測ったこと、$a = a$ では比が動かないことを対照に置いたこと、減る量が指数と一次の差であると示したこと、分離子を「両辺が別の手続きか」に置いたことである。

1. 記法と問い

設定：フレーゲは 1892 年に、「$a = a$」は自明で情報を持たず、「$a = b$」は情報を持ちうると述べた。明けの明星と宵の明星が同じ天体だという等式は、発見だった。

> **観察 1.1**
>
> 等号の左右が指すものは同じである。違うのは、そこに至る道である——だから情報は指す先ではなく、道の側にある。

> **観察 1.2**
>
> 道が違えば、長さも違いうる。片方が長く、もう片方が短ければ、等号を知ることで短いほうへ移れる——移れる分が測れるなら、認識価値は数になる。

問い：「$a = b$」が加えるものを、手数で測れるか。

2. 同じ数に、二つの道

計算 2.1：長さ $2n$ の釣り合った括弧列の本数を、二通りで求めた。一方は一つずつ組み立てて数える。他方は閉じた式で計算する。どちらも実際に手数を数えた。

n	数え上げの答	閉じた式の答	数え上げの手数	閉じた式の手数
4	**14**	**14**	**64**	**12**
8	**1430**	**1430**	**6917**	**24**
12	**208012**	**208012**	**1033411**	**36**

> **観察 2.2**
>
> 答は一致する。どの n でも両辺が同じ——等号が成り立っていることの検査であって、主張ではない。

> **観察 2.3**
>
> これが本稿の芯である。手数は $n = 12$ で **1033411** 対 **36**、**28705.9** 倍——等号を知っている者は、知らない者の **28705.9** 分の 1 の手数で同じ答に着く。

> **観察 2.4**
>
> 比は n とともに開く。**5.3** 倍、**288.2** 倍、**28705.9** 倍——同じ一本の等号の価値が、問題の大きさで変わる。等号の価値は文脈を持ち物にする。

> **観察 2.5**
>
> 論文405 の条件を満たしている。括弧列とカタラン数のあいだには全単射がある——だから一致は偶然ではない。全単射が無ければ、数が合っただけでは等号を立ててはいけない。

3. $a = a$ との対照

計算 3.1：同じ手続きを二度たどる場合を測った。$n = 4$ で、数え上げを二度なら **64** 手のまま、閉じた式に移れば **12** 手になる。

> **観察 3.2**
>
> $a = a$ では比が 1 である。どちらの側も同じ手続きだから——移る先が無い。フレーゲの言う「自明」は、この意味で仕事が減らないことである。

計算 3.3：閉じた式の側だけを、n を大きくして見る。

n	返る数	閉じた式の手数
4	14	12
8	1430	24
12	208012	36
16	**35357670**	48

> **観察 3.4**
>
> 手数は n に比例し、答は指数的に増える。$n = 16$ で **35357670** を **48** 手——減る仕事は、指数と一次の差である。

> **観察 3.5**
>
> だから価値は上限を持たない。n を大きくすれば比はいくらでも大きくなる——「この等式はどれだけ有用か」という問いには、n を指定しなければ答が無い。

4. 分離子

観察 4.1

分離子は、両辺が別の手続きかどうかである。別の手続きなら手数の差が測れ、同じ手続きなら測れない——左右の記号が違うかどうかではない。

観察 4.2

論文16 の別根のうち、一つだけを扱っている。あちらは等号に別根があると示した——本稿が測ったのは「二つの手続きを結ぶ等号」で、定義としての等号には手数の差が無い。

観察 4.3

論文300 の二つの基準で、答が食い違う。「道筋」の基準では別根（数え上げと閉じた式は違う道）——「対応」の基準では同根（全単射がある）。食い違うこと自体が、この等号の性質である。

観察 4.4

論文260 との関係。あちらは同値性が定理でテーゼが定理でないと示した——定理である同値だけが手続きを結ぶので、手数の差が測れる。テーゼには測る相手が無い。

観察 4.5

「情報量」とは呼ばない。減る手数はビットではない——同じ語を使うと、符号語の数え上げから来る量と混ざる。

観察 4.6

言わないこと。計算量の下界は論じない——手数を数えたのは一つの実装についてであり、もっと速い数え上げが在るかどうかは扱わない。

5. 点呼と結び

1. $n = 12$ でどちらも **208012**（計算 2.1）：等号が成り立つ。
2. 手数は **1033411** 対 **36**（計算 2.1）：本稿の芯。
3. 比は **28705.9** 倍（観察 2.3）：$n = 4$ では **5.3** 倍。
4. 比は n とともに開く（観察 2.4）：価値が文脈を持つ。
5. 全単射がある（観察 2.5）：一致は偶然でない。
6. $a = a$ では **64** 手のまま（計算 3.1）：移る先が無い。
7. $n = 16$ で **35357670** を **48** 手（計算 3.3）：指数と一次の差。
8. 価値に上限が無い（観察 3.5）：n を指定しないと答が無い。
9. 分離子は別の手続きか（観察 4.1）：記号の違いではない。
10. 二つの基準が食い違う（観察 4.3）：道筋では別根、対応では同根。
11. 「情報量」とは呼ばない（観察 4.5）：ビットではない。

結び：「$a = a$」は自明で、「$a = b$」は発見でありうる。同じ数に二つの道がある——長さ 24 の釣り合った括弧列は、一つずつ組み立てても閉じた式で計算しても **208012** 本になる。答が一致することは検査であって主張ではない。括弧列とカタラン数のあいだには全単射があるので、論文405 の条件を満たしており、一致は偶然ではない。道の長さが違う——$n = 12$ で数え上げは **1033411** 手、閉じた式は **36** 手で、**28705.9** 倍違う。等号を知っている者は、知らない者の **28705.9** 分の 1 の手数で同じ答に着く。比は $n = 4$ で **5.3** 倍、$n = 8$ で **288.2** 倍と開き続けるので、同じ一本の等号の価値が問題の大きさで変わる。等号の価値は文脈を持ち物にする。$a = a$ では、この比が動かない——同じ手続きを二度たどれば $n = 4$ で **64** 手のままで、閉じた式に移れば **12** 手になる。フレーゲの言う「自明」は、この意味で仕事が減らないことである。閉じた式の手数は n に比例し、返る数は指数的に増えるので、$n = 16$ では **35357670** を **48** 手で出せる。減る仕事は指数と一次の差である。だから価値に上限が無く、「この等式はどれだけ有用か」には n を指定しなければ答が無い。分離子は、両辺が別の手続きかどうかである——別の手続きなら手数の差が測れ、同じ手続きなら測れない。左右の記号が違うかどうかではない。論文16 は等号に別根があると示した。本稿が測ったのは「二つの手続きを結ぶ等号」で、定義としての等号には手数の差が無い。論文300 の二つの基準は、ここで食い違う。「道筋」では別根、「対応」では同根であり、食い違うこと自体がこの等号の性質である。論文260 の言う定理である同値だけが手続きを結ぶので手数の差が測れ、テーゼには測る相手が無い。正直に言えば——フレーゲの解釈はしていない。意義と意味の哲学的な議論には立ち入らず、認識価値という一点だけを数に写した。計算量の下界も論じておらず、手数を数えたのは一つの実装についてで、もっと速い数え上げが在るかどうかは扱っていない。等号が何を意味するかも述べず、記号の歴史も裁定していない。減る手数を「情報量」とも呼ばない。ビットではないからで、同じ語を使うと符号語の数え上げから来る量と混ざる。すべての等号がこうだとも書かない。手続きが二つあるときの話である。言えるのは、$a = b$ が加えるものが減る仕事として測れ、$a = a$ では測れない、そこまでである。

参考文献

1. Frege, G. (1892). *Uber Sinn und Bedeutung*. Zeitschrift fur Philosophie und philosophische Kritik.
2. Knuth, D. E. (1997). *The Art of Computer Programming* (3rd ed.). Addison-Wesley.
3. Recorde, R. (1557). *The Whetstone of Witte*. John Kyngstone.
4. Stanley, R. P. (2015). *Catalan Numbers*. Cambridge University Press.
5. 山岸勇輝 (2026).『等号にも別根がある』[論文16]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21600471
6. 山岸勇輝 (2026).『証明を落とした本から学ぶと、等号の身分も一緒に落ちる』[論文232]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22127528
7. 山岸勇輝 (2026).『同値性は定理であり、テーゼは定理ではない』[論文260]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22169292
8. 山岸勇輝 (2026).『三百本目の点呼 ── 同根か別根かは、判定できる』[論文300]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22171914
9. 山岸勇輝 (2026).『数値の一致が同根の証拠になるのは、全単射があるときだけである』[論文405]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22699433

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)