複合材の上限と下限は、算術平均と調和平均そのものである

— 複合材の上限は算術平均、下限は調和平均であり、幾何平均は必ずそのあいだに入る — 開きは材料の比だけで決まり、剛性を 10 倍しても **16.932376** のまま動かない — [論文540]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

複合材の剛性には上限と下限があり、その比には閉じた式がある。本稿が示すのは、その二つが算術平均と調和平均そのものであり、閉じた式が平均の族の中に住所を持つことである。新しい定理も法則も主張しない。第一に、論文342 の数が戻る——炭素繊維 230 GPa とエポキシ 3.5 GPa を半分ずつ混ぜると、並列 116.7500 GPa、直列 6.8951 GPa になる（第2節）。 第二に、これが本稿の芯である。あちらの閉じた式は、算術平均を調和平均で割ったものである——$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(r + 1/r) = 16.932376$ が、116.7500/6.8951 と 12 桁一致する（第2節）。 第三に、幾何平均は必ずあいだに入る——体積分率 0.5 で 28.3725 GPa であり、6.8951 と 116.7500 の内側にある（第3節）。 第四に、開きは材料の比だけで決まる——$(230, 3.5)$ でも $(460, 7.0)$ でも $(23, 0.35)$ でも、最大の開きは 16.932376 で動かない（第4節）。 第五に、比を変えれば動く——材料の比を 10 にすると最大の開きは 3.025000 になる（第4節）。 第六に、分離子は、どの平均を取るかである——ひずみを揃えるか応力を揃えるかが、算術平均を取るか調和平均を取るかに対応する（第5節）。 キーワード：複合材、フォークト＝ロイスの上下限、算術平均、調和平均、弾性率。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——フォークトとロイスの上下限も、平均の不等式も標準的である。より狭い上下限を提案しない——ハシン＝シュトリクマンの限界には立ち入らない。フォークトとロイスだけを見る。実験値を扱わない——実際の複合材がどこに落ちるかは主題ではない。異方性を扱わない——一軸方向の剛性だけを見る。材料を推薦しない——どの体積分率で作るべきかは述べない。「平均だから正しい」とは書かない——上下限であることは力学から出るのであって、平均の性質から出るのではない。既刊との関係：論文342 は同じ二材料を同じ割合で混ぜて剛性が **16.932376** 倍ひらくと示し、比の閉じた式を出した——本稿はその式が算術平均と調和平均の比であることを示す。あちらは「調和平均」という語を使っていない。論文194 は四つの平均が一つの族であり等号の柵が一つしかないと示した——本稿の上下限はその族の両端であり、幾何平均が内側に入ることも族の性質から出る。論文300 は同根か別根かが判定できると示した——本稿は「恒等性を保つ対応」の基準で同根と判定する。加えたのは、論文342 の数を独立に組み直して戻したこと、あちらの閉じた式が算術平均÷調和平均と 12 桁一致すると確かめたこと、幾何平均が必ずあいだに入ることを体積分率ごとに確かめたこと、開きが材料の比だけで決まることを 10 倍しても動かないことで示したこと、分離子を「どの平均を取るか」に置いたことである。

1. 記法と問い

設定：二つの材料を体積分率 f と $1-f$ で混ぜる。ひずみを揃えれば（並列）剛性は $fE_1+(1-f)E_2$、応力を揃えれば（直列）$\left(f/E_1+(1-f)/E_2\right)^{-1}$ になる。前者がフォークトの上限、後者がロイスの下限である。

> **観察 1.1**
>
> 式を見れば、平均の形をしている。並列は重み付き算術平均、直列は重み付き調和平均——力学から出た二つの式が、算術の族の両端に着地している。

> **観察 1.2**
>
> 論文342 はこの比の閉じた式を出した。$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\left(r+1/r\right)$ という形で——ただし「調和平均」という語は使っていない。同じものに名前が付いていなかった。

問い：その閉じた式は、平均の族のどこに住んでいるか。

2. 論文342 の数を組み直す

計算 2.1：炭素繊維 $E_1=230\ \mathrm{GPa}$、エポキシ $E_2=3.5\ \mathrm{GPa}$ を体積分率 0.5 で混ぜる。

量	本稿の計算	論文342
並列（フォークト）	**116.7500** GPa	**116.7500**
直列（ロイス）	**6.8951** GPa	**6.8951**
比の閉じた式	**16.932376**	**16.932376**

> **観察 2.2**
>
> 三つとも戻る。既刊の数を独立に組み直して一致した——食い違えば、どちらかの材料値か式が違っている。落ちうる形の検査である。

計算 2.3：並列を直列で割った値と、閉じた式を比べる。

$$\frac{\frac{1}{2}(E_1+E_2)}{\left(\frac{1}{2}(1/E_1+1/E_2)\right)^{-1}} = \frac{(E_1+E_2)^2}{4E_1E_2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\left(r+\frac{1}{r}\right)$$

両者は **16.932376** で 12 桁一致する。

> **観察 2.4**
>
> これが本稿の芯である。論文342 の閉じた式は、算術平均を調和平均で割ったものである——代数の変形で移り合うので、数値の一致ではない。

> **観察 2.5**
>
> だから名前が付く。「上限と下限の比」は「算術平均と調和平均の比」である——論文194 の族の中に住所ができた。

3. 幾何平均は、あいだに入る

計算 3.1：体積分率を動かして三つの平均を並べた。

f	フォークト	ロイス	比	幾何平均
0.1	26.1500	3.8823	6.7357	5.3190
0.3	71.4500	4.9676	14.3832	12.2847
0.5	**116.7500**	**6.8951**	**16.9324**	**28.3725**
0.7	162.0500	11.2666	14.3832	65.5285
0.9	207.3500	30.7839	6.7357	151.3428

> **観察 3.2**
>
> どの分率でも幾何平均が内側にある。$f = 0.5$ で $\mathbf{6.8951} < \mathbf{28.3725} < \mathbf{116.7500}$——これは力学からではなく、平均の族の不等式から出る。

> **観察 3.3**
>
> 比は f と $1 - f$ で対称である。$f = 0.1$ と $f = 0.9$ がどちらも 6.7357、$f = 0.3$ と $f = 0.7$ がどちらも **14.3832**——論文342 が示した対称性が、そのまま出ている。

> **観察 3.4**
>
> 最大は中央にある。$f = 0.5$ で **16.9324**——端では材料が一つになるので比は 1 に近づく。開きが最大なのは、二つが半分ずつのときである。

> **観察 3.5**
>
> 幾何平均は上下限ではない。あいだに入るが、実測がそこに来る保証は無い——力学が保証するのは両端だけである。族の内側は数学の話で、材料の話ではない。

4. 開きを決めているもの

計算 4.1：材料の剛性を丸ごと定数倍して、最大の開きを測り直した。

材料（GPa）	比	最大の開き
$(230, 3.5)$	65.714	**16.932376**
$(460, 7.0)$	65.714	**16.932376**
$(23, 0.35)$	65.714	**16.932376**
比を 10 にした場合	10	**3.025000**

> **観察 4.2**
>
> 剛性を 10 倍しても開きは動かない。**16.932376** のまま——開きは無次元であり、材料の比だけを持ち物にしている。

> **観察 4.3**
>
> 比を変えれば動く。比を 10 にすると **3.025000**——検査が素通しでないことの確認。何を変えても動かないのなら、それは検査になっていない。

> **観察 4.4**
>
> 式からも見える。$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(r + 1/r)$ に入るのは r だけである——E_1 も E_2 も単独では入らない。

5. 分離子

> **観察 5.1**
>
> 分離子は、どの平均を取るかである。ひずみを揃えれば算術平均、応力を揃えれば調和平均——境界条件の選び方が、平均の選び方に対応している。

観察 5.2

論文194 の柵がここでも効く。あちらは四つの平均が一つの族で、等号の柵が一つしかないと示した——その柵は「二つの材料が同じ剛性のとき」であり、そのとき上限と下限が一致して比が 1 になる。

観察 5.3

論文300 の第二基準を満たす。力学の式と平均の式のあいだに、代数の変形という対応がある——数値の一致ではない。

観察 5.4

ただし向きに注意が要る。上下限であることは力学から出る——平均の族に属することは、そのあとに分かる性質である。平均だから上下限なのではない。

観察 5.5

言わないこと。より狭い限界も、実験値も、異方性も扱わない——どの体積分率で作るべきかも述べない。

6. 点呼と結び

1. 並列 **116.7500 GPa**（計算 2.1）：論文342 と一致。
2. 直列 **6.8951 GPa**（計算 2.1）：論文342 と一致。
3. 閉じた式 **16.932376**（計算 2.1）：論文342 と一致。
4. 算術平均÷調和平均と **12** 桁一致（計算 2.3）：本稿の芯。
5. 幾何平均 **28.3725**（計算 3.1）：必ずあいだ。
6. f と $1-f$ で対称（観察 3.3）：**0.1** と **0.9** が同じ。
7. 最大は $f = 0.5$（観察 3.4）：端では 1 に近づく。
8. 剛性を 10 倍しても **16.932376**（計算 4.1）：無次元。
9. 比を 10 にすると **3.025000**（観察 4.3）：素通しでない。

10. 分離子はどの平均か（観察 5.1）：境界条件が選ぶ。

11. 平均だから上下限なのではない（観察 5.4）：向きは力学から。

結び：複合材の剛性には上限と下限があり、その比には閉じた式がある。既刊の数が戻る——炭素繊維 **230 GPa** とエポキシ **3.5 GPa** を半分ずつ混ぜると、並列 **116.7500 GPa**、直列 **6.8951 GPa**、比 **16.932376** となり、論文342 の三つの数と一致する。独立に組み直して合ったので、材料値と式の両方が確かめられた。食い違えば落ちる形の検査である。その閉じた式は、算術平均を調和平均で割ったものである——$(E_1+E_2)^2/(4E_1E_2)$ が $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}(r+1/r)$ に等しく、値は **16.932376** で 12 桁一致する。代数の変形で移り合うので数値の一致ではなく、論文300 の第二基準を満たす。これで「上限と下限の比」に名前が付いた。論文342 は「調和平均」という語を使っていなかった。幾何平均は必ずあいだに入る——$f=0.5$ で $\mathbf{6.8951 < 28.3725 < 116.7500}$ であり、これは力学からではなく論文194 の族の不等式から出る。比は f と $1-f$ で対称で、$f=0.1$ と $f=0.9$ がどちらも 6.7357、0.3 と 0.7 がどちらも 14.3832 になる。最大は中央の $f=0.5$ で、端では材料が一つになるので比が 1 へ近づく。ただし幾何平均は上下限ではない。あいだに入るだけで、実測がそこに来る保証は無い。開きを決めているのは、材料の比だけである——$(230, 3.5)$ でも $(460, 7.0)$ でも $(23, 0.35)$ でも最大の開きは **16.932376** で動かず、比を 10 にすると **3.025000** になる。何を変えても動かないなら検査になっていないので、動くことも確かめた。式からも見える。$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}(r+1/r)$ に入るのは r だけで、E_1 も E_2 も単独では入らない。分離子は、どの平均を取るかである——ひずみを揃えれば算術平均、応力を揃えれば調和平均で、境界条件の選び方が平均の選び方に対応している。論文194 の等号の柵は「二つの材料が同じ剛性のとき」で、そのとき上限と下限が一致して比が 1 になる。ただし向きには注意が要る。上下限であることは力学から出るのであって、平均の族に属することはそのあとに分かる性質である。正直に言えば——より狭い上下限は提案していない。ハシン＝シュトリクマンの限界には立ち入らず、フォークトとロイスだけを見た。実験値も扱っておらず、実際の複合材がどこに落ちるかは主題ではない。異方性も見ておらず、一軸方向の剛性だけである。どの体積分率で作るべきかも述べていない。「平均だから正しい」とも書かない。言えるのは、力学が出した二つの限界が算術平均と調和平均そのものであり、その比が材料の比だけで決まる、そこまでである。

参考文献

1. Hardy, G. H., Littlewood, J. E., & Polya, G. (1934). *Inequalities*. Cambridge University Press.

2. Hill, R. (1952). *The Elastic Behaviour of a Crystalline Aggregate*. Proceedings of the Physical Society A.

3. Reuss, A. (1929). *Berechnung der Fliessgrenze von Mischkristallen*. Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik.

4. Voigt, W. (1889). *Uber die Beziehung zwischen den beiden Elasticitatsconstanten isotroper Korper*. Annalen der Physik.

5. 山岸勇輝 (2026). 『四つの平均は一つの族であり、等号の柵は一つしかない』[論文194]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22106809

6. 山岸勇輝 (2026). 『三百本目の点呼 ── 同根か別根かは、判定できる』[論文300]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22171914

7. 山岸勇輝 (2026). 『同じ二材料を同じ割合で混ぜて、剛性が **16.93** 倍ひらく』[論文342]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22682160

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)