「平均 370 点までもつ」の半分は、256 点までに鳴る

— 三シグマの管理図が次に誤報を出すまでの点数は平均 **370.3983** 点だが、半分は **256.3938** 点までに鳴る — 平均に達するまでに鳴ってしまう確率は **0.632618**、すなわち $1-1/e$ である — [論文554]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

管理図の性能は「平均して何点まで誤報が出ないか」で語られる。本稿が示すのは、その平均が典型値ではなく、半分はその 0.69 倍で鳴ること、そしてこの 0.69 が $\ln 2$ であって管理図の性質ではないことである。新しい定理も法則も主張しない。 第一に、使う確率は独立に確かめられる——一点が三シグマの外に出る確率 **0.0026997961** が、慣行の 0.0027 と 10^{-5} で一致する（第2節）。 第二に、これが本稿の芯である。平均は **370.3983** 点、中央は **256.3938** 点である——半分はその手前で鳴る（第2節）。 第三に、比は $\ln 2$ である——**0.692211** 対 0.693147 で、0.001 以内。管理図の性質ではなく、幾何分布の性質である（第2節）。 第四に、平均に達するまでに鳴る確率は $1-1/e$ である——**0.632618** 対 0.632121。6 割以上が「平均より早い」（第3節）。 第五に、一枚の管理図でも誤報は珍しくない——25 点で **0.065353**、100 点で **0.236884** である（第3節）。 第六に、分離子は、鳴る確率が点ごとに一定かどうかである——一定でなければ連長は幾何分布ではなくなり、$\ln 2$ も $1-1/e$ も消える（第4節）。 キーワード：管理図、平均連長、三シグマ管理限界、幾何分布、中央値。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——三シグマ限界も平均連長も幾何分布も標準的である。管理図の運用を勧めない——限界を何シグマに置くべきかは述べない。工程がずれた場合の連長を扱わない——ここで測ったのは工程が安定しているときの誤報だけである。ずれを検出するまでの点数は別の主題である。分布は正規と仮定した——裾が重ければ **0.0027** そのものが変わる。連続する点のあいだの相関を入れない——各点は独立とした。自己相関があれば連長は幾何分布ではない。「連の判定」など追加規則を入れない——一点が限界を越えたときだけを見ており、**7** 点連続などの規則を足せば誤報はもっと増える。「三シグマは緩い」とも「厳しい」とも書かない——平均と中央がずれるという事実だけを示す。既刊との関係：論文**308** はあなたが乗るバスの間隔が平均の **2** 倍だと示した——どちらも「平均は典型ではない」型だが、根が違う。あちらは長い区間ほど観測されやすいという標本の偏り、こちらは幾何分布そのものの歪みである。あちらは平均より大きく、こちらは平均より小さい側にずれる。論文**317** は有意水準が「一回あたり」の約束だと示した——**0.0027** も一点あたりの約束であって、一枚の管理図あたりではない。**25** 点並べれば **0.065353** になる。論文**300** は同根か別根かが判定できると示した——「中央が平均の $\ln 2$ 倍」と「平均までに鳴る確率が $1-1/e$」は同じ幾何分布から出る同根である。加えたのは、三シグマの確率を独立に知られた値と照合したこと、平均と中央を **370.3983**・**256.3938** と測り比を $\ln 2$ と突合せたこと、中央連長を逆算して確率がちょうど **0.5** に戻ることを確かめたこと、平均までに鳴る確率を $1-1/e$ と照合したこと、分離子を「鳴る確率が点ごとに一定か」に置いたことである。

1. 記法と問い

設定：工程が安定しているとき、管理図の一点が三シグマ限界の外に出る確率を α とする。各点が独立なら、次に外れるまでの点数 L は幾何分布に従い

$$\Pr(L > m) = (1-\alpha)^{m}, \qquad \mathbb{E}[L] = \frac{1}{\alpha}$$

である。この $\mathbb{E}[L]$ が平均連長（**ARL**）と呼ばれる。

> **観察 1.1**
>
> 性能はこの平均で語られる。「三シグマなら平均 **370** 点までもつ」という言い方をする——平均が典型値であるという前提が入っている。

> **観察 1.2**
>
> 幾何分布は歪んでいる。最頻値は **1** 点目である——最も起こりやすいのは「すぐ鳴る」ことで、平均を押し上げているのは長い尾のほうである。

問い：平均と、半分の場合とは、どれだけ離れているか。

2. 平均は 370、中央は 256

計算 2.1：正規分布から α を出し、平均と中央を求めた。

量	値
一点が三シグマの外に出る確率 α	**0.0026997961**
平均連長 $1/\alpha$	**370.3983** 点
中央連長 $\ln(1/2)/\ln(1-\alpha)$	**256.3938** 点
中央 ÷ 平均	**0.692211**
$\ln 2$	0.693147

> **観察 2.2**
>
> α は独立に確かめられる。慣行で引かれる 0.0027 と 10^{-5} 以内で一致した——自作の実装ではなく、外にある値との突合せである。

> **観察 2.3**
>
> ARL も独立に確かめられる。慣行の 370 と 1 点以内で一致した——ここまでは教科書の値をなぞっている。

> **観察 2.4**
>
> これが本稿の芯である。中央は **256.3938** 点で、平均より 114 点も手前にある——「平均 370 点までもつ」と聞いた人が思う数より、半分の場合は早く鳴る。

観察 2.5

比は $\ln 2$ である。**0.692211** と 0.693147 が 0.001 以内で合う——$\ln 2$ は本稿の計算とまったく無関係に定まる数なので、これは検査である。合わなければ幾何分布の扱いが違う。

観察 2.6

管理図の性質ではない。$\ln 2$ が出るのは連長が幾何分布だからで、三シグマにも正規分布にも依らない——限界を何シグマに置いても、α が小さいかぎり中央は平均の 0.69 倍である。

観察 2.7

逆算でも確かめた。得た中央連長を戻すと、そこまでに鳴っている確率がちょうど 0.5 になる（10^{-12}）——解き損ないではないことを別に見ている。

3. 何点までに鳴るか

計算 3.1：点数を決めて、そこまでに一度でも鳴る確率を出した。

点数	一度でも鳴る確率
25（一枚ぶん）	**0.065353**
100	**0.236884**
370（平均連長）	**0.632222**
370.3983（平均連長ちょうど）	**0.632618**
$1-1/e$	0.632121

観察 3.2

平均に達するまでに鳴る確率は $1-1/e$ である。**0.632618** と 0.632121 が 0.001 以内——これも本稿と無関係に定まる数との突合せである。

観察 3.3

6 割以上が「平均より早い」。平均まで持つほうが少数派である——平均という言葉が、多数派の経験を表していない。

観察 3.4

一枚の管理図でも誤報は珍しくない。25 点で **0.065353**、つまり 15 枚に 1 枚ほどは工程が正常でも鳴る——0.06 より大きく 0.07 より小さい。100 点なら **0.236884** で、四回に一回近い。

観察 3.5

論文317 の読み違いが、ここでも起きる。0.0027 は一点あたりの約束であって、一枚あたりではない——有意水準が「一回あたり」であるのと同じ型である。

観察 3.6

論文308 とは根が違う。あちらは長い区間ほど観測されやすいという標本の偏りで、経験する値が平均より 2 倍「大きく」なった——こちらは幾何分布そのものの歪みで、典型は平均より「小さい」。同じ「平均は典型ではない」でも、ずれる向きが逆である。

4. 分離子

観察 4.1

分離子は、鳴る確率が点ごとに一定かどうかである。一定なら連長は幾何分布で、中央は平均の $\ln 2$ 倍になる——工程が徐々にずれていく場合、鳴る確率は点とともに上がるので連長は幾何分布ではなく、$\ln 2$ も $1 - 1/e$ も出てこない。

> **観察 4.2**
>
> 第二の分離子は点どうしの独立である。自己相関があれば、鳴った直後にまた鳴りやすい——そのときは中央がさらに前へ寄る。

> **観察 4.3**
>
> 論文300 の基準では、この二つは同根である。「中央が平均の $\ln 2$ 倍」と「平均までに鳴る確率が $1-1/e$」は、どちらも $(1-\alpha)^m$ 一つから出る——体系のふだんの結論は「別根」だが、ここは同根である。同根だと言えることも、判定の結果である。

> **観察 4.4**
>
> 言わないこと。「三シグマは緩い」とも「厳しい」とも書かない——平均と中央がずれるという事実だけを示す。限界をどこに置くかは、見逃しの側を測らなければ決まらない。

5. 点呼と結び

1. $\alpha = 0.0026997961$（計算 2.1）：慣行の 0.0027 と 10^{-5} 一致。
2. 平均連長 370.3983 点（計算 2.1）：慣行の 370 と 1 点以内。
3. 中央連長 256.3938 点（計算 2.1）：本稿の芯。
4. 比 0.692211（観察 2.5）：$\ln 2$ と 0.001 以内。
5. 逆算で確率が 0.5 に戻る（観察 2.7）：10^{-12}。
6. 平均までに鳴る確率 0.632618（計算 3.1）：$1-1/e$ と 0.001 以内。
7. 25 点で 0.065353（計算 3.1）：一枚でも珍しくない。
8. 100 点で 0.236884（計算 3.1）：四回に一回近い。
9. 分離子は確率が点ごとに一定か（観察 4.1）：ずれれば幾何分布でない。
10. 二つの事実は同根（観察 4.3）：どちらも $(1-\alpha)^m$ から。

結び：管理図の性能は「平均して何点まで誤報が出ないか」で語られる。ところがその平均は典型値ではない——三シグマの管理図で一点が外に出る確率は 0.0026997961、平均連長は 370.3983 点だが、中央連長は 256.3938 点で、114 点も手前にある。半分は「平均 370 点までもつ」と聞いた人が思う数より早く鳴る。使った α は慣行の 0.0027 と 10^{-5} 以内、ARL も慣行の 370 と 1 点以内で合っており、ここまでは教科書の値をなぞ

っている。そして中央と平均の比は $\ln 2$ である——**0.692211** と 0.693147 が 0.001 以内で合う。$\ln 2$ は本稿の計算と無関係に定まる数なので、これは突合せになっている。$\ln 2$ が出るのは連長が幾何分布だからであって、三シグマにも正規分布にも依らない。限界を何シグマに置いても、α が小さいかぎり中央は平均の 0.69 倍である——管理図の性質ではなく、分布の性質である。得た中央連長を戻すと、そこまでに鳴っている確率がちょうど 0.5 になることも別に確かめた。平均に達するまでに鳴ってしまう確率は $1-1/e$ である——**0.632618** と 0.632121 が 0.001 以内で合う。6 割以上が「平均より早い」のだから、平均という言葉は多数派の経験を表していない。一枚ぶんの 25 点でも一度でも鳴る確率は **0.065353**、15 枚に 1 枚ほどは工程が正常でも鳴り、100 点なら **0.236884** で四回に一回近い。論文317 の読み違いが重なる——0.0027 は一点あたりの約束であって、一枚あたりではない。分離子は、鳴る確率が点ごとに一定かどうかである——一定なら連長は幾何分布で中央は平均の $\ln 2$ 倍になり、工程が徐々にずれていく場合は鳴る確率が点とともに上がるので、$\ln 2$ も $1-1/e$ も出てこない。第二の分離子は点どうしの独立で、自己相関があれば中央はさらに前へ寄る。論文300 の基準では、「中央が平均の $\ln 2$ 倍」と「平均までに鳴る確率が $1-1/e$」はどちらも $(1-\alpha)^m$ 一つから出るので同根である。体系のふだんの結論は別根だが、同根だと言えることもまた判定の結果である。論文308 とは根が違う——あちらは長い区間ほど観測されやすいという標本の偏りで、経験する値が平均より 2 倍大きくなった。こちらは幾何分布そのものの歪みで、典型は平均より小さい。同じ「平均は典型ではない」でも、ずれる向きが逆である。正直に言えば——管理図の運用は勧めていない。限界を何シグマに置くべきかは述べず、測ったのは工程が安定しているときの誤報だけで、ずれを検出するまでの点数は別の主題である。分布は正規と仮定しており、裾が重ければ 0.0027 そのものが変わる。各点は独立とし、7 点連続などの追加規則も入れていない（足せば誤報はもっと増える）。そして「三シグマは緩い」とも「厳しい」とも書かない——平均と中央がずれるという事実だけを示した。

参考文献

1. Feller, W. (1968). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Volume 1* (3rd ed.). Wiley.
2. Montgomery, D. C. (2019). *Introduction to Statistical Quality Control* (8th ed.). Wiley.
3. Shewhart, W. A. (1931). *Economic Control of Quality of Manufactured Product*. Van Nostrand.
4. Woodall, W. H. (2000). *Controversies and Contradictions in Statistical Process Control*. Journal of Quality Technology.
5. 山岸勇輝 (2026). 『三百本目の点呼 —— 同根か別根かは、判定できる』[論文300]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22171914
6. 山岸勇輝 (2026). 『あなたが乗るバスの間隔は、平均の 2 倍である』[論文308]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22172305
7. 山岸勇輝 (2026). 『有意水準は「一回あたり」の約束であって、研究あたりではない』[論文317]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22208819

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)