

4 π パッチの構造的考察

— 第2版：山岸パッチの四つの主張のうち、二つは後の自分に追い越された — [論文56]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月 (第2版)

— From thinking to syncing. —

要旨

本稿は初版において、山岸パッチ ($G = 4\pi$, $\hbar = 1/4\pi$) の構造を四つの主張として整理した——(A) プランク量の閉包性は 4π に固有でない、(B) 全同期方程式 $e = 4\pi v r$ により電荷が幾何量として整合する、(C) $16\pi^2$ は二つの別根に分かれる、(D) 四つの独立な要求がいずれも $d = 3$ を選ぶ。第2版が行うのは、これら四つを、その後にかかれた本体系の論文と突き合わせることである。結果は非対称である——(A) と (C) は後の論文に一般化・精密化され、(B) は後の論文に狭められ、(D) は無傷で残った。第一に、(A) は論文116の定理の特別な場合であった。初版は「幾何量は a^0 、物質量は a^{-1} 」と述べたが、論文116はこれを $\varepsilon = \mu$ ——パッチ定数の冪は質量次元そのもの——として半整数を含めて一般に証明した。初版の二分は $\mu = 0 / \mu = 1$ の場合にすぎない (観察2.4)。第二に、(B) が解こうとした「問題」は、問題ではなかった。初版は $q_P = \sqrt{\hbar c}$ が生む半整数冪 $a^{-1/2}$ を「定理1の枠外に落ちる」と呼んだ。落ちていない。ガウス単位の電荷は $[e] = M^{1/2} L^{3/2} T^{-1}$ 、すなわち $\mu = 1/2$ であり、 $\varepsilon = \mu$ により $a^{-1/2}$ は正しい値である。そして $e = 4\pi v r$ は構成上 $\mu = 0$ であるから、これは半整数を解消したのではなく、半整数を持たない別の量に置き換えたにすぎない (観察3.2)。さらに論文15第3版は $e = 4\pi v r$ を「一つの半径で成り立つ言い換え」に狭めており、初版が用いた一般表示としての読みはその範囲を超えている (観察3.3)。第三に、(C) の Family II は一つの根ではなかった。論文46第3版は、ループ因子の $16\pi^2$ が $2 \times (2\pi)^4 / \Omega_3$ ——ヤコビアン $\times$ フーリエの規約 $\div$ 幾何——であり、規約を変えると $16\pi^2 \rightarrow 4 \rightarrow 1/\pi^2$ と変わることを示した (本稿で再確認)。ループ因子は規約を担っており、特性類の正規化 (Gauss–Bonnet $\cdot$ Chern $\cdot$ Hopf) とは別の身分である。また論文48第3版により、初版の表の「 4π の源 = パフィアン正規化」も訂正を要する——正規化は $(2\pi)^n \times (2^n n!)$ であり、 $(4\pi)^n$ は含まれていない (観察4.4)。第四に、(D) は無傷である。 $n = d - 1$ への一般化も、四つの要求が $d = 3$ を選ぶことも、そしてそれが導出ではなく整合による選択であるという限定も、そのまま残る。論文114は後に $n = d - 1$ を「次元を選ばない側」に置いたが、これは初版が自ら述べていたことと一致する。

本稿の位置づけ：新たな物理法則を主張しない。外部の物理はすべて標準的である（ベルトラン 1873、エーレンフェスト 1917、アダマール 1923、ホップ 1931、BPST 1975、ウィグナー 1939）。第2版が加えるのは本体系の内部での突き合わせのみであり、訂正の材料はすべて本体系の後の論文（15・46・48・116）から来ている。

1. 記法・前提・立場

定義 1.1（山岸パッチ）

自然単位系の選択として

$$G = 4\pi, \quad \hbar = \frac{1}{4\pi}$$

と置く。より一般に、正定数 $a > 0$ を用いた逆数パッチ $G = a, \hbar = 1/a$ を考える（ $a = 4\pi$ はその特別な場合）。ここで $4\pi = \int_{S^2} d\Omega$ は単位球面の立体角である（論文01）。

立場（本稿を通じて）：本稿は新たな物理法則を主張しない。示すのは、既知の物理を上記パッチのもとで書き直したときに何が構造として見えるか、そしてどの一致が本物の同一性で、どれが単なる数値的一致かである。数値的一致を同一と見なすことを避け、出自を異にするものを統合しない規律（論文48）を厳守する。

第2版の立場の追加：初版は上の規律を他人の主張に対して適用した。第2版はそれを初版自身に適用する。

2. 道A：プランク量の閉包性は 4π に固有でない

補題 2.1（逆数パッチの相殺）

$\hbar = 1/a, G = a$ のとき $\hbar G = 1$ （ a に依らず恒等的）かつ $\hbar/G = 1/a^2$ である。

定理 2.2（閉包性と二分）

$\hbar, G$ 依存が積 $\hbar G$ または商 $\hbar/G$ のみを通じて入るプランク量は、逆数パッチのもとで $c^N a^0$ （幾何量）と $c^N a^{-1}$ （物質質量）の二種に分離する。この分離は任意の $a > 0$ で成立する。

系 2.3 (初版の主結論・据え置き)

閉包性および二分は逆数パッチ $\hbar = 1/G$ の帰結であり、 $a = 4\pi$ に固有ではない。したがって「全プランク量が閉じる」ことを 4π の特別性の根拠に用いてはならない。

2.1 【第2版】この定理は論文116 に一般化されている

観察 2.4

初版の定理2.2 は、論文116 が証明した $\varepsilon = \mu$ の特別な場合である。論文116 は、 $[X] = L^\lambda M^\mu T^\tau$ を持つ任意の量について、逆数パッチ $G = a$, $\hbar = 1/a$ のもとで

$$X = a^{-\mu} c^N$$

すなわちパッチ定数の冪は質量次元そのものであることを示した。

初版の「幾何量／物質量」という二分は、 $\mu = 0/\mu = 1$ の場合にほかならない：

量	次元	μ	a の冪
l_P	L	0	a^0
t_P	T	0	a^0
m_P	M	1	a^{-1}
E_P	ML^2T^{-2}	1	a^{-1}
F_P	MLT^{-2}	1	a^{-1}
$\hbar$	ML^2T^{-1}	1	a^{-1}
G	$M^{-1}L^3T^{-2}$	-1	a^{+1}

初版は分かれ目を見つけ、論文116 はその分かれ目に名前を与えた。そして名前が与えられたことで、二分ではなく連続した目盛りであることが分かった—— μ は 0 と 1 だけでなく、-1 も 1/2 も取る。この一般化が次節を決定的に変える。

3. 道A補：電荷の幾何化

初版は、ガウス単位プランク電荷 $q_P = \sqrt{\hbar c}$ が逆数パッチ下で $c^{1/2}a^{-1/2}$ となり、 a の半整数冪を生じて定理2.2の枠外に落ちると述べ、これを全同期方程式 $e = 4\pi v r$ によって解消するとした。

3.1 【第2版】その「問題」は、問題ではなかった

観察 3.1（半整数冪は正しい値である）

ガウス単位電荷の次元は $[e] = M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}$ 、すなわち質量次元 $\mu = 1/2$ である。観察2.4の $\epsilon = \mu$ により、 a の冪は $-1/2$ でなければならない。 q_P が $a^{-1/2}$ を持つのは、パッチの欠陥ではなく、電荷の質量次元が半整数だからである。

したがって「定理2.2の枠外に落ちる」という初版の記述を訂正する。枠外には落ちていない——初版の定理2.2が $\mu \in \{0, 1\}$ に限って述べられていただけであり、論文116の形で述べれば $\mu = 1/2$ も枠内である。

観察 3.2（ $e = 4\pi v r$ は解消ではなく置換である）

全同期方程式 $e = 4\pi v r$ は長さと言時間のみから作られており、構成上 $\mu = 0$ である。したがってこれが a に依存しないのは発見ではなく定義の帰結である。

半整数冪は解消されていない。解消されたように見えるのは、半整数の質量次元を持つ量を、それを持たない別の量に置き換えたからである。 $\mu = 1/2$ を持つのはガウス単位電荷であり、 $4\pi v r$ ではない。これは論文45が「 $S = 1/(2\alpha)$ は定義の言い換えである」と判定したのと同型である。

観察 3.3（論文15第3版が残した範囲）

さらに、 $e = 4\pi v r$ の由来である論文15は第3版で大きく狭められている：

1. $\epsilon_0 = r$ は配置の関数であって単位を選択ではない（規約は数であって配置の関数ではない）。
2. これを力の法則の変更として読むと $e^2/(4\pi r^3)$ ——逆3乗となり、安定な円軌道が存在しない。
3. 一般の主量子数への拡張は取り下げられた。
4. 残るのは、 $(4\pi v)r = e$ が「一つの半径で成り立つ言い換え」であること、およびその単位系では電荷が「面積毎秒」の次元を持つことである。

初版はこれを電荷の一般表示として用いていた。論文15第3版が残した範囲より広い読みであり、第2版はこれをその範囲へ戻す。

系 3.4 （本節の結論の書き直し）

初版の系「 $m = 4\pi$ のもとで電荷は角運動量 mvr の形をとる」は、一つの半径における数値的な言い換えとしては正しい。しかし電荷が幾何量であるという一般的な主張としては成立しない——電荷の質量次元は $1/2$ であり、それは表示を変えても変わらない。変わったのは量であって、量の次元ではない。

4. 道C： $16\pi^2$ の由来判定

定義 4.1 （同根性の判定基準・据え置き）

二つの $16\pi^2$ の出現が同根であるとは、それぞれが正規化する対象の間に恒等性を保つ対応が存在し、かつ 4π にかかる指数 2 の源が同一であることをいう。数値的一致のみでは同根と見なさない（論文 48）。

4.1 【第2版】訂正した表

記号	出現	指数2の源	第2版の身分
A	$(m=4\pi)^2$	代数的二乗	規約 × 規約（論文46・116）
B	ループ因子 $1/(4\pi)^{d/2}$	$d/2 = 4/2$	ヤコビアン × 規約 ÷ 幾何
C	$\text{Vol}(S^3_R)$ 、 $R=2$	$R=2$ の調整	証拠に採らない（論文45）
D	4次元 Gauss--Bonnet	次元4	$(2\pi)^n \times (2^n n!)$ （論文48）
E	第2 Chern 数／インスタントン	次元4	特性類の正規化
F	Hopf 不変量	形式2枚	特性類の正規化

観察 4.2 (Family II は一つの根ではない)

初版は $B \cdot D \cdot E \cdot F$ を「4次元における特性類・測度の正規化」として単一の根に置いた。この統合は強すぎる。

論文46第3版が示したとおり、ループ因子の $16\pi^2$ は

$$16\pi^2 = 2 \times (2\pi)^4 / \Omega_3, \quad \Omega_3 = 2\pi^2$$

と分解される（本稿で記号計算により再確認）。ここで 2 は $k^3 dk = \frac{1}{2} u du$ という変数変換のヤコビアン、 $(2\pi)^4$ はフーリエ変換の 2π をどこに置くかという規約、 $\Omega_3 = 2\pi^2$ は単位3球面の表面積すなわち幾何である。そして規約を変えると数が変わる—— $\int d^4 k / (2\pi)^4$ を $\int d^4 k / (2\pi)^2$ にすれば 4 に、 $\int d^4 k$ なら $1/\pi^2$ になる（本稿で確認）。物理的振幅は変わらないが、 $16\pi^2$ という数は変わる。

一方 $D \cdot E \cdot F$ は特性類の正規化であり、フーリエの規約を変えても動かない。したがって B は $D \cdot E \cdot F$ と別の身分を持つ。Family II は少なくとも二つに割れる。

観察 4.3 (Family I と Family II の別根性は、より強い理由で成立する)

初版は A と Family II の一致を「 $d = 4$ で $d/2 = 2$ となる偶然」とした。この判定は正しく、第2版はさらに強い理由を与える——論文46第3版によれば、 $2(2\pi)^4 / \Omega_3$ （左辺）は規約×幾何×ヤコビアンであり、 $(4\pi) \times (4\pi)$ （右辺）は規約×規約である（パッチ定数は任意の $a > 0$ でよい・論文116）。組成が完全に異なる。

観察 4.4 (行D の帰属を訂正する)

初版の表は行Dの「 4π の源」をパフィアン正規化としていた。論文48第3版によれば、Chern--Gauss--Bonnet の正規化は $(2\pi)^n \times (2^n n!)$ という一つの塊であり、 2^n をそこから引き剥がして $(4\pi)^n$ を作る操作は切る場所を誤っていた。実際 $n = 1, 2, 3$ でこの塊は 4π , $32\pi^2$, $384\pi^3$ である（本稿で確認）。 $(4\pi)^n$ は含まれていない。

4.2 橋の検証：原子の $16\pi^2$ は Hopf 不変量か（据え置き）

命題 4.5（底 S^2 の内在性）

$E^2 = |\mathbf{p}|^2 c^2 + (4\pi c^2)^2$ において $m_0 = 4\pi$ と E を固定すると $|\mathbf{p}|$ は一定となり、運動量方向 $\hat{\mathbf{p}}$ は S^2 をなす。これは Hopf 束の底 S^2 に相当し、物理から強制される。

命題 4.6（素直な運動量 S^3 の自明性）

一点コンパクト化した運動量空間 S^3 から底 S^2 への方向写像は放射状であり、 $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$ における自明類 ($H = 0$) である。ゆえに Hopf 構造 ($H = 1$) は生じない。

命題 4.7（カシミール独立性）

電子スピン $1/2$ の状態空間は真正の Hopf 束である。しかしその $16\pi^2$ はスピンに、A の $16\pi^2$ は質量パッチに由来する。質量とスピンはポアンカレ群の独立なカシミール

$$P^2 = m^2 c^2, \quad W^2 = -m^2 c^2 s(s+1)$$

であり、一方から他方は導かれない。したがって両 $16\pi^2$ は別根であり、これらを同一視することは質量とスピンの混同にあたる。

系 4.8（橋の判定・据え置き）

原子内の二つの $16\pi^2$ は別根である。真正の Hopf $16\pi^2$ は電子スピンに実在するため、将来 Hopf に基づく定式化を行う場合の自然な入口はスピン／ベリー位相であって、質量表示ではない。この判定は第2版でも変更しない——本節は初版が負の結果として正しく書いた部分である。

5. 道D：次元選択 $n = d - 1$ と $3 + 1$ 次元（据え置き）

定理 5.1（唯一性定理の d 次元一般化）

d 次元で球対称べき型密度 $\rho(r) = r^{-n}$ を考える。球殻質量増加率 $dm/dr = \Omega_{d-1} r^{d-1-n}$ が定数となる必要十分条件は $n = d - 1$ である。

この一般化は任意の d で成立する。したがって唯一性定理単体は $d = 3$ を選ばない。論文114 は後に、対象が「自分が何次元にいるかを知っているか」という物差しで対象を仕分け、 $n = d - 1$ を「選ばない側」に置いた——これは初版が自ら述べていたことと一致する（第2版で確認）。

命題 5.2（ $3 + 1$ 次元の整合的選択）

流束保存力 $F \propto 1/r^{d-1}$ に対し、以下の各要求はいずれも $d = 3$ を要請する：

1. 軌道安定性：すべての束縛軌道が閉じる中心力は $1/r^2$ と r に限られる（ベルトランの定理）。流束力が前者と一致するのは $d = 3$ 。
2. 原子安定性：引力ポテンシャル $-1/r^{d-2}$ が束縛基底状態をもつのは $d \leq 3$ 。 $d \geq 4$ では中心への落下を免れない。
3. 波動伝播：鋭い波面をもつ無歪伝播（ホイヘンスの原理）が成立するのは奇数空間次元であり、その最小が $d = 3$ 。
4. 位相正規化：ループ／位相測度が $16\pi^2$ として整うのは時空 $d = 4$ 、すなわち空間 $d = 3$ 。ただし第2版は、この第4項がフーリエの規約を含むことを明記する（観察4.2）——他の三つと同じ強さでは数えられない。

系 5.3（ $d = 3$ の意味・据え置き）

$d = 3$ は「流束保存が特別」な次元ではない（流束保存は任意の d で成立する）。 $d = 3$ は、流束保存が軌道安定性・原子安定性・波動伝播と一致する唯一の次元である。

立場の明示（据え置き）：本節は「空間が3次元でなければならない」という導出ではなく、整合による選択（エーレンフェスト以来の系譜）である。これを導出と混同しない。

次元の分布についての注記（据え置き）：本節が $d = 3$ を選ぶのは特定の基準群に対してである。基準を変えれば特別次元も変わる——単位球の体積を最大化する次元は $d = 5$ である。したがって単一の「魔法の次元」は存在せず、特別次元は最適化する量ごとに分布する。

6. 結論

1. (A) は論文116に一般化された。プランク量の閉包性と二分は逆数パッチの帰結であり 4π に固有でない——この主結論はそのまま正しい。加えて、その二分が質量次元 μ そのものであることが論文116により示された。初版は分かれ目を見つけ、後の論文がそれに名前を与えた（観察2.4）。
2. (B) が解こうとした問題は、問題ではなかった。 q_P の $a^{-1/2}$ はガウス単位の電荷の質量次元 $\mu = 1/2$ そのものであり、枠外には落ちていない（観察3.1）。 $e = 4\pi v r$ は構成上 $\mu = 0$ であるから、これは半整数の解消ではなく、量の置換である（観察3.2）。さらに論文15第3版は $e = 4\pi v r$ を「一つの半径で成り立つ言い換え」に狭めており、初版の一般表示としての読みはその範囲を超えていた（観察3.3）。「電荷は幾何量である」という一般的主張を取り下げる（系3.4）。
3. (C) の Family II は一つの根ではなかった。論文46第3版により、ループ因子の $16\pi^2$ はヤコビアン $\times$ フーリエ規約 $\div$ 幾何であり、規約を変えると $16\pi^2 \rightarrow 4 \rightarrow 1/\pi^2$ となる（本稿で確認）。B は特性類の正規化 ($D \cdot E \cdot F$) と別の身分を持つ（観察4.2）。また行Dの「 4π の源=パフィアン正規化」は、論文48第3版により訂正を要する——正規化は $(2\pi)^n \times (2^n n!)$ であり $(4\pi)^n$ を含まない（観察4.4）。一方、Family I と Family II の別根性は、より強い理由（組成の完全な相違）で成立する（観察4.3）。
4. (D) は無傷である。 $n = d - 1$ への一般化、四つの要求による $d = 3$ の選択、そしてそれが導出ではなく整合による選択であるという限定は、すべてそのまま残る。ただし第4の要求（位相正規化）はフーリエの規約を含むため、他の三つと同じ強さでは数えられない（命題5.2）。カシミール独立性による負の結果も無傷である（系4.8）。

結語: 初版は「どの一致が本物の同一性で、どれが単なる数値的一致か」を分離することを目的とした。第2版が行ったのは、その物差しを初版自身に当てることである。四つの主張のうち二つは後の自分に一般化され、一つは後の自分に狭められ、一つは無傷で残った。自分の規律を自分に当てたとき、何が残るかが分かる。

参考文献

1. Bertrand, J. (1873). *Théorème relatif à l'action d'une force centrale*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 77, 849--853.
2. Ehrenfest, P. (1917). *In what way does it become manifest in the fundamental laws of physics that space has three dimensions?* Proceedings of the Amsterdam Academy, 20, 200--209.
3. Hadamard, J. (1923). *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*. New Haven: Yale University Press.
4. Hopf, H. (1931). *Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche*. Mathematische Annalen, 104, 637--665.

5. Wigner, E. P. (1939). *On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group*. Annals of Mathematics, 40, 149--204.
6. Belavin, A. A., Polyakov, A. M., Schwarz, A. S., & Tyupkin, Yu. S. (1975). *Pseudoparticle solutions of the Yang--Mills equations*. Physics Letters B, 59, 85--87.
7. 't Hooft, G. (1976). *Computation of the quantum effects due to a four-dimensional pseudoparticle*. Physical Review D, 14, 3432--3450.
8. 山岸勇輝 (2026). $n = 2$ 唯一性定理 [論文01]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21403186
9. 山岸勇輝 (2026). 4π 質量相殺定理 [論文02]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21403931
10. 山岸勇輝 (2026). 規約は数であって、配置の関数ではない [論文15]、第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21600352
11. 山岸勇輝 (2026). 三種類の数 [論文38]、第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21430234
12. 山岸勇輝 (2026). 4π の冪は、質量次元である [論文44]、第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21602231
13. 山岸勇輝 (2026). 面積は、立体角ではない [論文45]、第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21602337
14. 山岸勇輝 (2026). $16\pi^2$ のうち、幾何なのは $\Omega_3 = 2\pi^2$ だけである [論文46]、第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21602422
15. 山岸勇輝 (2026). パフィアンの $2^n n!$ は、一つの塊である [論文48]、第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21602525
16. 山岸勇輝 (2026). 4π パッチのオイラー標数的起源 [論文67]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21642170
17. 山岸勇輝 (2026). 規約と事実 [論文95]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758621
18. 山岸勇輝 (2026). 四次元にいと知っているのは誰か [論文114]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21963544
19. 山岸勇輝 (2026). c の指数が数えているもの [論文116]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22003794

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)