

# カルツァ＝クライン再入口

— 第2版：山岸パッチで見た KK 電荷——壁だと思っていたものは、同じ  $16\pi$  を二次数えていた —

[論文57]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月 (第2版)

— From thinking to syncing. —

## 要旨

本稿は論文56の続編として、 $4\pi$ の階段  $\Lambda(d) = (4\pi)^{d/2}$ 、コンパクト角運動量としての電荷、そして KK 次元還元が与える素電荷  $e_0 = \sqrt{16\pi G}/R$  を扱い、最後の係数を明示的な未解決問題（壁）として提示した。第2版は、その壁が壁でなかったことを示す。初版は「 $e_0$  の  $\sqrt{16\pi G}$  に含まれる因子  $2$  ( $16\pi G = 2 \cdot 8\pi G$ ) と、アインシュタイン方程式の因子  $2$  が、二つの独立なルートから同じ数に着地する」ことを示唆的だと述べた。独立ではない。 $\kappa^2 = 16\pi G_4$  という条件は、5次元アインシュタイン＝ヒルベルト作用の前因子  $1/(16\pi G)$  をマクスウェル項の正準化のために打ち消すという操作そのものであり、 $16\pi$  は最初に置いたものが運ばれてきただけである。二つのルートが同じ  $2$  に集中したのではなく、一つのルートで  $2$  が一度現れただけである（観察4.3）。これは論文51が球殻定理で示したのと同じ形である——同じ対象を二次数えると、偶然に見える。第二に、階段  $\Lambda(d)$  は全段でフーリエの規約を担っている。論文46第3版は  $d = 4$  でループ因子がヤコビアン  $\times$  規約  $\div$  幾何であることを示したが、これは一般に成り立つ—— $(4\pi)^{d/2}\Gamma(d/2) = 2(2\pi)^d/\Omega_{d-1}$ （本稿で全  $d$  について記号計算で確認）。ただし偶奇の観察は生き残る—— $\pi^{d/2}$  は  $\Omega_{d-1} = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$  から来る幾何であり、規約を担うのは  $2^d$  の側だからである。発見は残り、その理由が変わる（観察2.3）。第三に、電荷は角運動量ではありえない。 $[mvr]$  の質量次元は  $1$ 、ガウス単位の電荷は  $1/2$  である（論文56第2版・論文116）。等式として成立しない。残るのは KK 自身の言明—— $p_5$  が単一値性によって量子化され  $p_5 R \in \mathbb{Z}$  となること——であり、これはパッチを一切必要としない（観察3.3）。第四に、「臨界次元の集中」は言い過ぎであった。 $\Gamma(n - d/2)$  の最初の極は  $d = 2n$  であり、 $d = 4$  は  $n = 2$  の場合の話である。しかも極の位置は  $\Gamma$  関数の解析構造、中心落下はシュレーディンガー作用素の有界性であって、別根である。論文56が自らの版で「整合による選択であって導出ではない」と限定したのと同じ強さに戻す（観察2.5）。

本稿の位置づけ：新たな物理法則を主張しない。外部の物理はすべて標準的である（カルツァ 1921、クライン 1926、次元正則化、エーレンフェスト 1917）。第2版が加える訂正の材料は、すべて本体系の後の論文（46・51・56第2版・116）から来ている。

## 1. 記法・前提・立場

論文56 で確立したとおり、「 $c$ の冪＝次元数」という文字どおりの読みは、指数が次元解析で一意に決まるため支持されない。また  $c$  に関する積分は  $c$  が定数であるため無効である（論文34 で撤回）。本稿はこれらを踏まえ、 $c$  ではなく次元  $d$  を連続変数として扱う（次元正則化・熱核・ $\zeta$  正則化と同じ土俵）。

立場：本稿は新たな物理法則を主張しない。既知の構造（KK 理論）のもとで体系の量がどう位置づくかを整理し、確定できる部分と未解決の部分を峻別する。

第2版の立場の追加：初版は最後の一点を壁として明示した。第2版はその壁を検査し、壁ではなかったことを書く。

## 2. 次元の階段 $\Lambda(d) = (4\pi)^{d/2}$

### 命題 2.1（階段の閉じた形）

ループ／測度因子は

$$\Lambda(d) = (4\pi)^{d/2} = 2^d \pi^{d/2}$$

と書ける。とくに偶数次元では  $\pi$  の整数冪、奇数次元では半整数冪となる（本稿で確認）：

| $d$ | $\Lambda(d) = 2^d \pi^{d/2}$ | $\pi$ の冪  |
|-----|------------------------------|-----------|
| 2   | $4\pi$                       | 整数        |
| 3   | $8\pi^{3/2}$                 | 半整数       |
| 4   | $16\pi^2$                    | 整数（我々の時空） |
| 5   | $32\pi^{5/2}$                | 半整数       |
| 6   | $64\pi^3$                    | 整数        |

### 系 2.2（初版の負の結果・据え置き）

体系に現れる  $4\pi, 16\pi^2, 64\pi^3$  は  $\Lambda(d)$  の偶数次元の段である。したがって 5 次元は  $32\pi^{5/2}$  という  $\pi$  の半整数冪であり、整数  $\pi$  の階段には乗らない。「きれいな5次元」は本読みでは成立しない。

2.1 【第2版】階段は全段でフーリエの規約を担っている

観察 2.3

論文46第3版は、 $d = 4$ においてループ因子の  $16\pi^2$  がヤコビアン  $\times$  フーリエの規約  $\div$  幾何であり、規約を変えると数が変わることを示した。これは  $d = 4$ に限った話ではない。実際、任意の  $d$ について

$$(4\pi)^{d/2} \Gamma(d/2) = \frac{2(2\pi)^d}{\Omega_{d-1}}, \quad \Omega_{d-1} = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \tag{2}$$

が成立する（本稿で記号計算により全  $d$ について確認）。ここで  $2$  は変数変換のヤコビアン、 $(2\pi)^d$  はフーリエ変換の  $2\pi$  をどこに置くかという規約、 $\Omega_{d-1}$  は単位  $(d - 1)$  球面の面積すなわち幾何である。階段のどの段も、この三つを含んでいる。

観察 2.4 （それでも偶奇の観察は生き残る）

式(2)の右辺を見ると、 $\pi$  の冪を作っているのは  $\Omega_{d-1} = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$  の側、すなわち球面である。  
 $\Lambda(d) = 2^d \pi^{d/2}$  の分解でいえば：

| 因子          | どこから来るか                    | 身分 |
|-------------|----------------------------|----|
| $2^d$       | フーリエの規約 $(2\pi)^d$ の $2^d$ | 規約 |
| $\pi^{d/2}$ | 球面の面積 $\Omega_{d-1}$       | 幾何 |

偶数次元で整数冪・奇数次元で半整数冪という観察は、 $\pi^{d/2}$  についての言明である。すなわち幾何の側にある。したがって系2.2 の負の結果——5次元は整数  $\pi$  の階段に乗らない——は規約の選び方によらず成立する。  
発見は残り、その理由が変わった。「 $4\pi$  の階段」と呼ぶのは正確でない——正確には球面の  $\pi^{d/2}$  に、規約の  $2^d$  が掛かったものである。

2.2 【第2版】「臨界次元の集中」は言い過ぎであった

初版は、(i) ループ積分  $\Gamma(2 - d/2)$  の最初の極が  $d = 4$  であること、(ii) 引力ポテンシャルの中心落下閾値が空間  $d = 4$  であることを挙げ、臨界次元が  $d = 4$  に集中すると述べた。

### 観察 2.5 (二つの訂正)

第一に、(i) は特定の積分についての言明である。伝播関数の冪  $n$  に対して極は  $\Gamma(n - d/2)$  に現れ、最初の極は  $d = 2n$  である ( $n = 1$  で  $d = 2$ 、 $n = 2$  で  $d = 4$ 、 $n = 3$  で  $d = 6$ )。「最初の極は  $d = 4$ 」は  $n = 2$  の場合の話である。

第二に、(i) と (ii) は別根である。(i) は  $\Gamma$  関数の解析構造についての事実であり、(ii) はシュレーディンガー作用素が下に有界であるかという事実である。両者が同じ  $d$  を指すことは事実だが、同じ理由からではない。

したがって「集中」という語を取り下げる。論文56 は同種の状況について「整合による選択であって導出ではない」と正しく限定していた。第2版はその強さに戻す—— $d = 4$  は、独立な複数の要求がたまたま同じ答えを返す次元である。

## 3. コンパクト角運動量としての電荷と、同期としての単一値性

カルツァ＝クライン理論では、時空は4次元＋半径  $R$  のコンパクト円  $S^1$  (座標  $y \sim y + 2\pi R$ ) からなり、場は  $\psi(x, y) = \sum_n \psi_n(x) e^{iny/R}$  と展開される。

### 命題 3.1 (単一値性による電荷量子化)

場が円を一周して単一値であるためには

$$p_5 \cdot (2\pi R) = 2\pi n \implies p_5 = \frac{n}{R} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

に量子化される。この  $p_5$  が4次元では電荷として現れる。電荷量子化は、位相が円を一周して再び揃うこと (単一値性) から従う。

### 系 3.2 (角運動量としての $p_5 R$ )

$p_5 R = n \in \mathbb{Z}$  であり、これは円まわりの角運動量が整数値をとることを意味する。この言明は完全に  $KK$  の内部で閉じており、いかなるパッチも必要としない。

### 3.1 【第2版】 $e = 4\pi v r$ を角運動量と同一視することはできない

初版は、質量パッチ  $m = 4\pi$  のもとで  $e = 4\pi v r = m v r$  が円まわりの角運動量  $L = p_5 R$  に一致すると述べた。

### 観察 3.3 (質量次元が合わない)

$[mvr] = M \cdot (L/T) \cdot L = ML^2T^{-1}$ 、すなわち質量次元  $\mu = 1$ 。一方ガウス単位の電荷は  $[e] = M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}$ 、すなわち  $\mu = 1/2$  である。

$1 \neq 1/2$  であるから、 $e = mvr$  は量の等式として成立しない。論文116 が示したとおり、質量次元はパッチ定数の冪そのものであり ( $\epsilon = \mu$ )、表示を変えても動かない。論文56第2版はこの点をもって「電荷が幾何量である」という一般的主張を取り下げた。本稿の「電荷は角運動量である」も同じ理由で取り下げる。

### 観察 3.4 (では何が残るか)

残るのはKK 自身の言明である——単一値性が  $p_5$  を量子化し、 $p_5 R$  が整数になる。これはパッチを一切用いずに成り立ち、「位相が一周して再び揃う」という同期の描像も、そこにそのまま宿っている。

初版が見た構造は実在する。実在しないのは、それを体系の  $e = 4\pi v r$  と等号で結ぶことである。同期の描像はKK の中に既にあり、パッチを経由する必要がなかった。

## 4. $16\pi G$ 係数と、初版が「壁」と呼んだもの

### 命題 4.1 (KK 次元還元による素電荷)

5次元アインシュタイン＝ヒルベルト作用  $S_5 = \frac{1}{16\pi G_5} \int d^5x \sqrt{-g_5} R_5$  をアンザッツ

$ds_5^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + (dy + \kappa A_\mu dx^\mu)^2$  で還元し、マクスウェル項を正準化  $-\frac{1}{4}F^2$  すると  $\kappa = \sqrt{16\pi G_4}$  となり、 $n$  番目モードの電荷は

$$q_n = \kappa \frac{n}{R} = \frac{\sqrt{16\pi G}}{R} n, \quad e_0 = \frac{\sqrt{16\pi G}}{R}$$

$G = 4\pi$  のもとで  $e_0 = \sqrt{16\pi \cdot 4\pi}/R = \sqrt{64\pi^2}/R = 8\pi/R$  (本稿で確認)。

### 系 4.2 ( $4\pi$ と $8\pi$ は別量・据え置き)

$4\pi$  は質量パッチに、 $8\pi = \sqrt{16\pi G}|_{G=4\pi}$  は結合定数の正規化に由来する。役割の異なる別量であり、矛盾ではない。ただし第2版は付言する——パッチ定数は任意の正の数でよいから (論文116)、これは規約と規約の対比である。

#### 4.1 【第2版】壁は壁ではなかった

初版は次のように書いた—— $e_0$  の  $\sqrt{16\pi G}$  に含まれる因子 **2** ( $16\pi G = 2 \cdot 8\pi G$ ) は、アインシュタイン方程式  $G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$  の因子 **2** と同一であり、二つの独立なルート（重力の作用ではなく電荷の結合）から、まったく同じ因子 **2** に着地する。この集中は示唆的である、と。

##### 観察 4.3 （二つのルートは、一つのルートである）

独立ではない。 $\kappa^2 = 16\pi G_4$  という条件がどこから来るかを追えばよい。

還元の結果、作用は

$$S = \frac{1}{16\pi G_4} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ R_4 - \frac{\kappa^2}{4} F^2 \right]$$

の形になる。マクスウェル項を正準形  $-\frac{1}{4}F^2$  にするには

$$\frac{1}{16\pi G_4} \cdot \frac{\kappa^2}{4} = \frac{1}{4} \implies \kappa^2 = 16\pi G_4$$

とすればよい。すなわち  $\kappa^2 = 16\pi G_4$  とは、「最初に置いた前因子  $1/(16\pi G)$  を打ち消せ」という指示そのものである。

したがって  $\kappa$  に現れる  $16\pi$  は、独立に到達されたものではない。それは5次元アインシュタイン＝ヒルベルト作用の前因子が、還元を通して運ばれ、そこで相殺されたものである。同じ  $16\pi$  が、置かれた場所と打ち消される場所の二箇所に現れているにすぎない。

初版が「二つの独立なルートが同じ **2** に集中する」と呼んだものは、一つのルートで **2** が一度現れた事実である。集中していない。したがって「示唆的である」という評価を取り下げる。

##### 観察 4.4 （これは体系が繰り返し出会う形である）

論文51 は球殻定理において、 $4\pi$  が球の面積とガウス則の規格化という両辺に現れ、同一の立体角として相殺することを示した。同じ対象が二度現れると、一致が偶然に見える。本稿の  $16\pi$  も同じである——置いたものが戻っただけである。

残る問い（正しい形に書き直す）：では、アインシュタイン＝ヒルベルト作用の前因子に  $16\pi G = 2 \cdot 8\pi G$  の **2** が入っているのはなぜか。これはニュートン極限のトレース反転に由来する（既知）。そして論文01 が未解決と述べた「質量階段の2枚の **2** と同一起源か」という問いは、本稿の **KK** 還元からは何も新しい証拠を得られない

——KK は  $16\pi$  を運んだだけで、その中身については何も言っていないからである。壁は解けたのではなく、この論文の壁ではなかった。

## 5. 結論

1. 階段は  $\Lambda(d) = (4\pi)^{d/2} = 2^d \pi^{d/2}$  であり、偶数次元で  $\pi$  の整数冪、奇数次元で半整数冪となる（命題2.1）。5次元は  $32\pi^{5/2}$  で整数  $\pi$  の階段に乗らない（系2.2）。
2. 【第2版】階段は全段でフーリエの規約を担っている—— $(4\pi)^{d/2} \Gamma(d/2) = 2(2\pi)^d / \Omega_{d-1}$ （全  $d$  で確認）。ただし偶奇の観察は生き残る： $\pi^{d/2}$  は球面の面積から来る幾何であり、規約を担うのは  $2^d$  の側だからである（観察2.3・2.4）。発見は残り、その理由が変わった。
3. 【第2版】「臨界次元の集中」を取り下げる—— $\Gamma(n - d/2)$  の最初の極は  $d = 2n$  であり、 $d = 4$  は  $n = 2$  の話である。また極の位置と中心落下は別根である（観察2.5）。論文56と同じ「整合による選択」の強さに戻す。
4. KK では電荷が  $S^1$  まわりの量子化された運動量として現れ、電荷量子化は単一値性から従う（命題3.1、系3.2）。この言明はパッチを必要としない。
5. 【第2版】 $e = 4\pi v r$  を角運動量と同一視することを取り下げる—— $[mvr]$  の質量次元は1、ガウス電荷は  $1/2$  であり、等式として成立しない（観察3.3）。同期の描像はKKの中に既にあり、パッチを経由する必要がなかった（観察3.4）。
6. 完全なKK還元は  $e_0 = \sqrt{16\pi G}/R = 8\pi/R$  ( $G = 4\pi$ ) を与える（命題4.1）。 $4\pi$  と  $8\pi$  が別量であることは正しいが、両者とも規約である（系4.2）。
7. 【第2版】初版が「壁」と呼んだものは、壁ではなかった—— $\kappa^2 = 16\pi G_4$  は「最初に置いた前因子を打ち消せ」という指示であり、 $16\pi$  は運ばれてきた同じ  $16\pi$  である。二つの独立なルートが同じ2に集中したのではなく、一つのルートで2が一度現れただけである（観察4.3）。これは論文51が球殻定理で示したのと同じ形である（観察4.4）。論文01の未解決問題に対し、本稿は新しい証拠を与えていない。

結語: 初版は最後に一つの壁を残した。第2版がしたのは、その壁を叩いてみることである。壁は解けなかった——そもそも壁ではなかった。置いたものが戻ってきただけであり、一致に見えたのは同じ数を二次数えていたからである。未解決だと思っていたものが、そもそも問いになっていなかったと分かることも、一つの前進である。

## 参考文献

1. Kaluza, Th. (1921). *Zum Unitätsproblem der Physik*. Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften Berlin, 966-972.
2. Klein, O. (1926). *Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie*. Zeitschrift für Physik, 37, 895-906.

3. Ehrenfest, P. (1917). *In what way does it become manifest in the fundamental laws of physics that space has three dimensions?* Proceedings of the Amsterdam Academy, 20, 200--209.
4. Wigner, E. P. (1939). *On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group*. Annals of Mathematics, 40, 149--204.
5. 't Hooft, G., & Veltman, M. (1972). *Regularization and renormalization of gauge fields*. Nuclear Physics B, 44, 189--213.
6. 山岸勇輝 (2026).  $\mathbf{n} = \mathbf{2}$  唯一性定理 [論文01]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21403186
7. 山岸勇輝 (2026). 規約は数であって、配置の関数ではない [論文15]、第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21600352
8. 山岸勇輝 (2026).  $\mathbf{c}^5$  の点呼 [論文34]、第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21430340
9. 山岸勇輝 (2026).  $4\pi$  の冪は、質量次元である [論文44]、第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21602231
10. 山岸勇輝 (2026).  $16\pi^2$  のうち、幾何なのは  $\Omega_3 = 2\pi^2$  だけである [論文46]、第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21602422
11. 山岸勇輝 (2026). 山岸・重力多重極集約理論 [論文51]、第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21602935
12. 山岸勇輝 (2026).  $4\pi$  パッチの構造的考察 [論文56]、第2版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21597500
13. 山岸勇輝 (2026). 規約と事実 [論文95]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758621
14. 山岸勇輝 (2026).  $\mathbf{c}$  の指数が数えているもの [論文116]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22003794

---

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)