独楽が立つか倒れるかは、回転の速さの程度ではなく、一つの閾値で決まる

— 質量 50 g・半径 2.5 cm の円板の独楽では、閾値は毎分 638.3542 回転である — 歳差の近似式は、閾値の下でも答えを出し続ける — [論文586]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— *From thinking to syncing.* —

要旨

速く回っている独楽は倒れない、と言われる。本稿が示すのは、独楽が真上で立っていられるかは回転の速さの程度ではなく一つの閾値で決まり、閾値の下では、どれほど小さな傾きから放しても決まった角度まで倒れ込むことである。新しい定理も法則も主張しない。 第一に、閾値がある——閾値は $\omega_c = 2\sqrt{I_1 M g l}/I_3$ で、質量 50 g・半径 2.5 cm の円板の独楽では 66.848293 rad/s、毎分 638.3542 回転である（第2節）。 第二に、閾値の上では、独楽は小さく揺れるだけである——真上近くから静かに放すと、最大の傾きは放した傾きの $q/\sqrt{q^2-1}$ 倍（q は閾値に対する回転の速さの比）で、$q = 1.2$ で 1.809068 倍、$q = 1.01$ で 7.123991 倍である（第3節）。 第三に、これが本稿の芯である。閾値の下では、放した傾きをいくら小さくしても、最大の傾きは $2\cos^{-1} q$ から縮まない——$q = 0.99$ で 16.219229 度、$q = 0.9$ で 51.683866 度。運動方程式をそのまま数値で解いても、差は 2.5×10^{-9} 度である（第3節）。 第四に、閾値の少し下は「倒れやすい」ではなく「倒れる」である——この独楽の円板の縁は 38.6598 度で床に触れるので、閾値より 5.6372 パーセント遅い毎分 602.3691 回転で、真上から放しても縁が床に届く（第3節）。 第五に、歳差の近似式には閾値が無い——傾き 20 度・毎分 3000 回転では、厳密な歳差は近似 $Mgl/(I_3\omega)$ の 1.010869 倍で、良い近似である。閾値ちょうどでは厳密な歳差が近似のちょうど 2.000000 倍になる。閾値の下の毎分 300 回転でも、近似式は 3000 回転の 10.000000 倍の歳差を答えるが、そのとき定常な歳差は存在しない（第4節）。 第六に、分離子は、判別式 $I_3^2\omega^2 - 4I_1 Mgl\cos\theta$ の符号である——同じ判別式が、真上で立っていられるか（$\theta = 0$）と、傾いたまま定常に歳差できるかを決める（第5節）。 キーワード：独楽、重い対称独楽、眠り独楽、安定の閾値、歳差運動。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——重い対称独楽（ラグランジュの独楽）の運動、真上で眠る独楽の安定の条件、歳差の近似式はすべて標準的である。摩擦を入れない——支点の摩擦と空気の抵抗で回転が落ちること、傾いた独楽が摩擦で起き上がることは扱わない。支点は動かない——尖った先が床の一点に留まるとした。諸元は代表値である——質量 $50\ \mathrm{g}$・半径 $2.5\ \mathrm{cm}$ の薄い円板を、重さの無い軸で支点から $2\ \mathrm{cm}$ の高さに置いた模型である。床は、縁が触れる傾きを出すだけで、当たったあとは扱わない。独楽を設計しない。既刊との関係：論文359 は、自転車が倒れない理由にジャイロ効果は桁が足りないことを示した——本稿の独楽は、ジャイロ効果だけで立つ系である。ただし閾値の上でだけ。論文300 は同根か別根かが判定できると示した——「真上で立っていられるか」と「傾いたまま定常に歳差できるか」は、同じ判別式から出る同根である。加えたのは、閾値の上で揺れが $q/\sqrt{q^2-1}$ 倍にとどまることと、閾値の下で $2\cos^{-1} q$ まで倒れ込むことを、保存量とエネルギーから出る二次式と運動方程式の二つの道で確かめたこと、縁が床に触れる回転数を出したこと、歳差の近似式が閾値を持たないことを示したこと、分離子を判別式の符号に置いたことである。

1. 記法と問い

設定：床の一点を支点にして回る対称な独楽を考える。質量 M、支点から重心までの高さ l、軸まわりの慣性モーメント I_3、支点を通る横軸まわりの慣性モーメント I_1、軸まわりの回転の角速度 ω、真上からの傾き θ とする。軸まわりの角運動量、鉛直まわりの角運動量、エネルギーの三つが保たれる。

> **観察 1.1**
>
> 速く回っている独楽は倒れない、と言われる。速いほど倒れにくい、という程度の話に聞こえる——それが程度の話か、境目のある話かは、別の問いである。

問い：独楽が真上で立っていられるかは、回転の速さの程度で決まるのか、一つの閾値で決まるのか。

2. 閾値

計算 2.1：質量 $0.050\ \mathrm{kg}$、半径 $0.025\ \mathrm{m}$ の薄い円板を、支点から $0.020\ \mathrm{m}$ の高さに置いた。$I_3 = 1.5625 \times 10^{-5}\ \mathrm{kg\,m^2}$、$I_1 = 2.78125 \times 10^{-5}\ \mathrm{kg\,m^2}$、$Mgl = 0.00980665\ \mathrm{N\,m}$ で、閾値

$$\omega_c = \frac{2\sqrt{I_1\, Mgl}}{I_3}$$

は $\mathbf{66.848293}\ \mathrm{rad/s}$、毎分 $\mathbf{638.3542}$ 回転である。

> **観察 2.2**
>
> 閾値は、重力が倒そうとする強さ Mgl と、軸の回転が持つ角運動量 $I_3\omega$ の釣り合いで決まる。$I_3\omega$ が $2\sqrt{I_1 Mgl}$ を超えるかどうかが境目である——次の節で、この境目の上と下で、独楽のふるまいが程度ではなく質で変わることを見る。

3. 真上近くから放す

計算 3.1：真上から傾き θ_0 だけずらし、歳差も揺れもさせずに静かに放した。保存量とエネルギーから、最大の傾きは二次式の根で決まる。$q = \omega/\omega_c$ として、

q	毎分の回転	$\theta_0 = 0.01$ rad での最大	$\theta_0 \to 0$ の極限
1.20	766.0250	1.036433 度	0 度
1.01	644.7377	3.966115 度	0 度
0.99	631.9706	16.689836 度	**16.219229** 度
0.95	606.4365	36.434312 度	**36.389745** 度
0.90	574.5188	51.699421 度	**51.683866** 度
0.80	510.6833	73.745100 度	**73.739795** 度
0.50	319.1771	120.001103 度	**120.000000** 度

> **観察 3.2**
>
> 閾値の上では、放した傾きが小さければ揺れも小さい。最大の傾きは、小さな傾きの極限で放した傾きの $q/\sqrt{q^2-1}$ 倍で、$q = 1.2$ で **1.809068** 倍、$q = 1.05$ で **3.279649** 倍、$q = 1.01$ で **7.123991** 倍である（放す傾き 10^{-3} rad では二次式から 1.809067・3.279607・7.121760 倍）——閾値に近づくほど大きくなるが、どの速さでも有限で、放す傾きを小さくすれば揺れはいくらでも小さくなる。

> **観察 3.3**
>
> これが本稿の芯である。閾値の下では、放した傾きをいくら小さくしても、最大の傾きは $2\cos^{-1} q$ から縮まない——$q = 0.99$、つまり閾値よりわずか 1 パーセント遅いだけで、どれほど小さな傾きからでも **16.219229** 度まで倒れ込む。速さが閾値をまたぐと、揺れは「放した傾きの何倍か」から「決まった角度」へ、質で変わる。

計算 3.4：二次式とは別の道として、運動方程式をそのまま数値で解いた（ルンゲ＝クッタ法・放す傾き 0.01 rad）。$q = 1.2$ で最大 **1.036433** 度、$q = 0.9$ で **51.699421** 度で、二次式との差は最大で 2.5×10^{-9} 度である。

> **観察 3.5**
>
> この独楽では、円板の縁が床に触れる傾きは $\tan^{-1}(l/a) = 38.6598$ 度である。真上から放して縁が床に届くのは $2\cos^{-1} q$ がこれを超えるとき、すなわち q が **0.943628** 以下のときである——閾値より **5.6372** パーセント遅い毎分 **602.3691** 回転で、独楽は床に縁をつく。閾値の少し下は「少し倒れやすい」ではなく「倒れる」である。

4. 歳差の近似式

計算 4.1：傾き 20 度で定常に歳差するときの歳差の角速度を、厳密な二次式の遅い根と、速い独楽の近似式 $Mgl/(I_3\omega)$ で比べた。傾き 20 度での閾値は $\omega_c\sqrt{\cos 20^\circ}$ で、毎分 **618.8061** 回転である。

毎分の回転	近似（rad/s）	厳密（rad/s）	厳密÷近似
3000	1.997794	2.019509	**1.010869**
1000	5.993383	6.713230	**1.120107**
700	8.561976	11.669027	**1.362890**
650	9.220589	14.119609	**1.531313**
600	9.988972	根が無い	なし
300	19.977943	根が無い	なし

観察 4.2

速い独楽では、近似式は良い。毎分 3000 回転で厳密な歳差は近似の 1.010869 倍で、歳差の周期は 3.1112 秒である——近似式は、回転が落ちるほど歳差が速くなると言い、これはこの範囲で正しい。

観察 4.3

近似式には閾値が無い。閾値ちょうどで二つの根は重なり、厳密な歳差は近似のちょうど 2.000000 倍になる。閾値の下の毎分 300 回転でも、近似式は 3000 回転の 10.000000 倍の歳差を答える——そのとき厳密な式には定常な歳差の根が無い。近似式は、独楽が倒れる回転数でも、もっともらしい数を出し続ける。

5. 分離子

観察 5.1

分離子は、判別式 $I_3^2\omega^2 - 4I_1 Mgl\cos\theta$ の符号である。正なら傾き θ のまま定常に歳差でき、負ならできない。$\theta = 0$ と置くと閾値 ω_c に戻る——真上で立っていられるかと、傾いたまま歳差できるかは、同じ判別式が決めている。

観察 5.2

論文359 と並べる。あちらは、自転車が倒れない理由にジャイロ効果は桁が足りないことを示した——独楽は、ジャイロ効果だけで立つ系である。ただし閾値の上でだけで、閾値の下ではジャイロ効果があっても倒れる。

観察 5.3

論文300 の基準では同根である。「真上で立っていられるか」と「傾いたまま定常に歳差できるか」は、同じ判別式から出る——二つを分けているのは $\cos\theta$ の値だけである。

> **観察 5.4**
>
> 言わないこと。摩擦を入れていないので、回転が少しずつ落ちて閾値を割る過程も、傾いた独楽が起き上がる現象も扱っていない。独楽を設計しない——示したのは、立つか倒れるかに閾値があり、その上と下でふるまいが質で変わることである。

6. 点呼と結び

1. 閾値は毎分 **638.3542** 回転（計算 2.1）：$\omega_c = 2\sqrt{I_1 M g l}/I_3$。
2. 上では放した傾きの $q/\sqrt{q^2-1}$ 倍（観察 3.2）：$q = 1.01$ でも **7.123991** 倍。
3. 下では $2\cos^{-1} q$ まで倒れ込む（観察 3.3）：本稿の芯。
4. **1** パーセント遅いだけで **16.219229** 度（計算 3.1）：放す傾きに依らない。
5. 運動方程式と二次式の差は 2.5×10^{-9} 度（計算 3.4）：二つの道。
6. 縁が床に触れるのは **38.6598** 度（観察 3.5）：閾値より **5.6372** パーセント遅いと倒れる。
7. 毎分 3000 回転で近似は **1.010869** 分の 1（計算 4.1）：良い近似。
8. 閾値で厳密な歳差は近似の **2.000000** 倍（観察 4.3）：二つの根が重なる。
9. 近似式は閾値の下でも答える（観察 4.3）：定常な歳差が無い回転数で。
10. 分離子は判別式の符号（観察 5.1）：立つかと歳差できるかは同根。

結び：速く回っている独楽は倒れない、と言われる。それは程度の話ではなく、閾値の話である——質量 50 g・半径 2.5 cm の円板の独楽では、閾値は $\omega_c = 2\sqrt{I_1 M g l}/I_3$、毎分 **638.3542** 回転である。その上では、真上近くから放した独楽は放した傾きの $q/\sqrt{q^2-1}$ 倍しか揺れず、1 パーセント速い $q = 1.01$ でも **7.123991** 倍にとどまる。その下では、どれほど小さな傾きから放しても $2\cos^{-1} q$ まで倒れ込み、1 パーセント遅いだけで **16.219229** 度になる。この独楽の縁は **38.6598** 度で床に触れるので、閾値より **5.6372** パーセント遅い毎分 **602.3691** 回転で倒れる。歳差の近似式 $Mgl/(I_3\omega)$ は、この閾値を持たない——毎分 3000 回転では良い近似だが、閾値では厳密な値のちょうど半分になり、閾値の下でも、定常な歳差が存在しない回転数で、もっともらしい数を答え続ける。分離子は、判別式 $I_3^2\omega^2 - 4I_1 M g l \cos\theta$ の符号である——同じ判別式が、真上で立っていられるかと、傾いたまま歳差できるかを決める。論文300 の基準で、二つは同根である。既刊との位置——論文359 は、自転車が倒れない理由にジャイロ効果は桁が足りないことを示した。独楽は、ジャイロ効果だけで立つ系である。ただし閾値の上でだけ。正直に言えば——摩擦を入れていないので、実際の独楽で回転が少しずつ落ちて閾値を割る過程も、傾いた独楽が摩擦で起き上がる現象も扱っていない。諸元は代表値で、支点は動かず、床に当たったあとは扱わない。

参考文献

1. Goldstein, H., Poole, C., & Safko, J. (2002). *Classical Mechanics* (3rd ed.). Addison-Wesley.

2. Klein, F., & Sommerfeld, A. (1897). *Über die Theorie des Kreisels*. Teubner.

3. Landau, L. D., & Lifshitz, E. M. (1976). *Mechanics* (3rd ed.). Pergamon Press.

4. 山岸勇輝 (2026). 『三百本目の点呼 ── 同根か別根かは、判定できる』[論文300]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22171914

5. 山岸勇輝 (2026). 『自転車が倒れない理由に、ジャイロ効果は桁が足りない』[論文359]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22697293

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)