

単位球の体積は 5 次元で最大になる

— 第2版：その 5 は「半径を 1 と置いた」ことの帰結である（山岸パッチと速度球） — [論文59]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月（第2版）

— From thinking to syncing. —

要旨

半径 1 の n 次元ボールの体積 $V_n = \pi^{n/2}/\Gamma(n/2 + 1)$ が整数次元 $n = 5$ で最大となること（連続変数では $n^* \approx 5.2569$ ）は古典的に既知である。初版はこれを本体系に位置づけ、 c を半径と読むと c^n が n 次元ボール体積のスケーリングに一致すること、そして「体積最大の次元 5」が「容量最大＝サーバー」の直観に対応することを述べ、同時に $d = 5$ を $d = 3$ （安定性）と混同してはならないと正しく戒めた。第2版はその戒めを、初版が予期していなかったところまで押し進める。第一に、 $n = 5$ という答えは、半径を 1 と置いたことの帰結である。半径 λ のボールで比べれば最大化条件は $\psi(n/2 + 1) = \ln(\pi\lambda^2)$ となり、峰は動く—— $\lambda = 1$ で 5.26、 $\lambda = 2$ で 24.1、 $\lambda = 3$ で 55.5、 $\lambda = 10$ で 627、 $\lambda = 1/2$ では 0.48（本稿ですべて数値確認）。同じ球を別の定規で測れば、峰は好きな場所へ動く。すなわち $d = 5$ は規約であって事実ではない（論文95）。第二に、そもそも V_4 と V_5 は比べられない。 V_n は無次元の係数であり、体積は $V_n r^n$ 、次元は L^n である。 L^4 に付く数と L^5 に付く数を大小比較している——論文28（指数は次元ではない）・論文45（面積は立体角ではない）が名指しした圏の誤りである（観察2.3）。第三に、これが初版の第4節を鋭くする。初版は「基準を変えれば特別次元も変わる」と正しく述べた。第2版はその分類をもう一段細かくする——定規を変えても動かない基準と、動く基準がある。軌道が閉じること（ベルトラン）、束縛基底状態が存在すること、ホイヘンスの原理が成立することは定規に依らない。単位球の体積が最大になることは定規に依る。 $d = 3$ は世界についての事実であり、 $d = 5$ は「1 という数」についての事実である（観察4.2）。第四に、「 c を半径と読む」は、初版が思ったより強く言える。初版はこれを「 $G = 4\pi$ と同格の表示の選択」と弱めた。弱める必要はない——特殊相対論では $|v| < c$ であるから、到達可能な速度の集合は本当に半径 c のボールである。その体積は $V_n c^n$ 、次元 $(L/T)^n$ で整合する。これは体系自身の速度球（論文20・63）にほかならない。パッチではなく、実在する対象である（観察3.2）。以上により、初版の系1（「5次元サーバー」）を撤回する。

本稿の位置づけ：新たな物理法則も新たな数学定理も主張しない。 V_n の $n = 5$ 最大は古典的既知である（Smith & Vamanamurthy 1989）。第2版が加えるのは、その既知の事実がどの範囲で意味を持つかの判定のみである。

1. 記法・立場

立場：本稿は新たな物理法則も新たな数学定理も主張しない。本稿の寄与は、既知の事実を本体系へ位置づけ、どこまでが読み替えて、どこからが規約に過ぎないかを峻別することにある。

第2版の立場の追加：初版は「 $d=5$ を $d=3$ と混同してはならない」と正しく戒めた。第2版はその戒めを、 $d=5$ 自身に当てる。

2. 既知の事実：単位球体積の 5 次元最大

定理 2.1（単位球体積の次元依存・古典的既知）

半径 1 の n 次元ボールの体積は

$$V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} \quad (1)$$

であり、整数 n に対して $n=5$ で最大値 $V_5 = 8\pi^2/15 \approx 5.2638$ をとる。連続変数としては $\psi(n/2 + 1) = \ln \pi$ より $n^* \approx 5.2569$ （本稿で数値確認）。

n	V_n	数値
2	π	3.1416
3	$4\pi/3$	4.1888
4	$\pi^2/2$	4.9348
5	$8\pi^2/15$	5.2638（最大）
6	$\pi^3/6$	5.1677
7	$16\pi^3/105$	4.7248

$n \rightarrow \infty$ で $V_n \rightarrow 0$ ($V_{20} = 2.58 \times 10^{-2}$ 、 $V_{50} = 1.73 \times 10^{-13}$ ・本稿で確認)。

2.1 【第2版】この比較は、何と何を比べているのか

観察 2.2 (V_n は係数であって体積ではない)

式(1)の V_n は無次元の係数である。実際の体積は半径 r のボールに対し $V_n r^n$ であり、その次元は L^n である。

観察 2.3 (したがって V_4 と V_5 の大小比較は圏の誤りである)

「 $V_5 > V_4$ 」は、 L^5 に付く数と L^4 に付く数を並べている。これは体系が繰り返し名指ししてきた誤りである——論文28 は「 $3/2$ は尺度指数であって次元ではない」と判じ、論文45 は「面積は立体角ではない」と判じた。次元の異なる量は、そのままでは比較できない。

比較が可能に見えるのは、半径を 1 と置いたからである。そして次節が示すとおり、その 1 は定規の選択にすぎない。

2.2 【第2版】峰は定規とともに動く

観察 2.4 ($n = 5$ は「半径を 1 と置いた」ことの帰結である)

半径 λ のボールどうしで比べるとき、最大化すべきは $V_n \lambda^n$ である。 $\ln(V_n \lambda^n)$ を n で微分して零と置くと

$$\psi\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \ln(\pi \lambda^2) \quad (2)$$

となる。 $\lambda = 1$ のとき右辺は $\ln \pi$ で $n^* \approx 5.2569$ を与えるが、 λ を変えれば峰は動く（本稿ですべて数値確認）：

半径の目盛り	$\ln(\pi\lambda^2)$	峰の位置 n^*
$\lambda = 1/2$	-0.2416	0.48
$\lambda = 1$ (初版)	1.1447	5.26
$\lambda = 2$	2.5310	24.1
$\lambda = 3$	3.3420	55.5
$\lambda = 10$	5.7499	627

同じ球を別の定規で測れば、峰は好きな場所へ動く。半径 **10** の球で比べれば「特別な次元」は **627** である。

系 2.5 ($d = 5$ は規約である)

したがって「単位球の体積は **5** 次元で最大である」という言明は、**5** について何かを述べているのではなく、**1** について何かを述べている。論文95 の言葉でいえば、これは規約であって事実ではない。

定理2.1 自体は正しい。訂正するのは、その **5** を次元についての事実として読んだ点である。

3. 構造的位置づけ： c を半径と読むこと

命題 3.1 (c^n と n 次元体積)

c を半径とする読みのもとで

$$V_n(c) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)} c^n$$

すなわち c^n は半径 c の n 次元ボール体積のスケーリングに一致する。表面積から体積への移行 $\int 4\pi c^2 dc = (4/3)\pi c^3$ は、論文01 の殻積分 (co-area) そのものであり、積分が次元を一つ上げる。

3.1 【第2版】この読みは、初版が思ったより強い

観察 3.2（速度球は実在する）

初版は「 c を半径とする」ことを「 $G = 4\pi$ と同格の表示の選択」と弱め、「 c が長さであるという主張ではない」と但し書きを置いた。弱める必要はなかった。

特殊相対論では到達可能な速度が $|v| < c$ を満たす。すなわち速度空間には、半径 c のボールが実在する。その体積は $V_n c^n$ であり、次元は $(L/T)^n$ で整合している—— c を長さを読み替える必要はまったくない。速度空間における半径が c なのである。

これは体系自身が既に持っている対象である——論文20（速度球の体積）、論文63（速度空間と時空の曲率双対性、「 c = 半径」クラスタ）。パッチではなく、実在する幾何学的対象である。

系 3.3（初版の系1「5次元サーバー」を撤回する）

それでもなお、「容量が最大の次元は 5」という結論は成立しない。理由は二つある。

1. 比較そのものが定規に依存する（観察2.4）。半径を c に固定して次元を変えるとき、比べているのは $(L/T)^4$ の量と $(L/T)^5$ の量であり、その大小は c を何と測るかで変わる。 $c = 1$ と置く単位系でのみ 5 が出る。
2. 速度空間の次元は位置空間の次元に等しく、それは 3 である。5 次元の速度空間は、我々の世界には存在しない。

したがって「5次元サーバー（容量最大）」という対応を取り下げる。初版は「示唆的な共鳴であって証明ではない」と正しく限定していたが、第2版はさらに進んで、共鳴そのものが定規の産物であったと述べる。

4. 「次元ごとの特別さ」の分布

命題 4.1（特別次元は基準に依存して分布する・据え置き）

「特別な次元」は、何を最適化・要求するかに依存して異なる：

- 安定性・清浄性（軌道安定・原子安定・波動伝播） $\Rightarrow$ 空間 $d = 3$ （論文56）。

- 位相正規化（ループ測度） $\Rightarrow$ 時空 $d = 4$ （論文56・57）。ただし論文57第2版により、これはフーリエの規約を含む。
- 単位球の体積最大 $\Rightarrow d = 5$ （定理2.1）。ただし観察2.4により、これは半径の目盛りの選択に依存する。

単一の「魔法の次元」は存在しない。

4.1 【第2版】分類をもう一段細かくする

観察 4.2（定規を変えても動かない基準と、動く基準がある）

初版は「基準が変われば特別次元も変わる」と述べた。正しい。第2版が加えるのは、基準そのものにも二種類あるということである。

基準	選ぶ次元	定規を変えると
すべての束縛軌道が閉じる（ベルトラン）	$d = 3$	動かない
引力ポテンシャルに束縛基底状態がある	$d \leq 3$	動かない
ホイヘンスの原理が成立する	奇数次元	動かない
単位球の体積が最大になる	$d = 5$	動く（観察2.4）

上三つは、長さをメートルで測ろうとフィートで測ろうと変わらない。軌道が閉じるかどうかは定規の問題ではない。最後の一つだけが、定規を変えると答えを変える。

系 4.3（ $d = 3$ と $d = 5$ の身分は等しくない）

したがって初版が「混同してはならない」と述べたのは正しかったが、その理由は「基準が違うから」だけではない。 $d = 3$ は世界についての事実であり、 $d = 5$ は「1 という数」についての事実である。両者は同じ表に並べられるが、同じ重みでは数えられない。

5. 結論

1. $V_n = \pi^{n/2}/\Gamma(n/2 + 1)$ は整数次元 $n = 5$ で最大（連続 $n^* \approx 5.2569$ ・本稿で数値確認）。これは古典的既知である（定理2.1）。

2. 【第2版】 V_4 と V_5 の大小比較は、 L^4 に付く数と L^5 に付く数を並べている——次元の異なる量の比較であり、論文28・45 が名指しした圏の誤りである（観察2.2・2.3）。
3. 【第2版】 $n = 5$ という答えは、半径を 1 と置いたことの帰結である。半径 λ で比べれば峰は $\psi(n/2 + 1) = \ln(\pi\lambda^2)$ で決まり、 $\lambda = 1/2, 1, 2, 3, 10$ に対しそれぞれ **0.48, 5.26, 24.1, 55.5, 627** へ動く（本稿で数値確認）。 $d = 5$ は規約であって事実ではない（観察2.4、系2.5）。
4. 【第2版】「 c を半径と読む」ことは、初版が思ったより強く言える——特殊相対論の $|v| < c$ により速度空間には半径 c のボールが実在し、体積 $V_n c^n$ は次元 $(L/T)^n$ で整合する。パッチではない（観察3.2）。
5. 【第2版】初版の系1（「5次元サーバー」）を撤回する——比較が定規に依存すること、および速度空間の次元が位置空間と同じ **3** であることによる（系3.3）。
6. 【第2版】特別次元の分類をもう一段細かくする——軌道安定性・原子安定性・波動伝播は定規を変えても動かないが、単位球の体積最大は動く。 $d = 3$ は世界についての事実であり、 $d = 5$ は「1 という数」についての事実である（観察4.2、系4.3）。

結語: 初版は「 $d = 5$ を $d = 3$ と混同してはならない」と戒めた。第2版がしたのは、その戒めを $d = 5$ 自身に当てることである。当ててみると、 $d = 5$ は次元についての事実ですらなかった——それは半径を 1 と置いたという、こちら側の選択についての事実だった。特別に見える数を見たら、まず「何を 1 と置いたか」を問う。

参考文献

1. Smith, D. J., & Vamanamurthy, M. K. (1989). *How small is a unit ball?* Mathematics Magazine, 62(2), 101--107.
2. 山岸勇輝 (2026). $n = 2$ 唯一性定理 [論文01]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21403186
3. 山岸勇輝 (2026). アインシュタイン=山岸・体積復元方程式 [論文12]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21404703
4. 山岸勇輝 (2026). オーバークロック熱力学 [論文20]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21601035
5. 山岸勇輝 (2026). $3/2$ は次元ではない [論文28]、第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21430531
6. 山岸勇輝 (2026). 面積は、立体角ではない [論文45]、第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21602337
7. 山岸勇輝 (2026). パフィアンの $2^n n!$ は、一つの塊である [論文48]、第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21602525
8. 山岸勇輝 (2026). 4π パッチの構造的考察 [論文56]、第2版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21597500
9. 山岸勇輝 (2026). カルツァークライン再入口 [論文57]、第2版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21597608
10. 山岸勇輝 (2026). 因子 2 の一致は「別根」である [論文58]、第2版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21597747
11. 山岸勇輝 (2026). 速度空間と時空の曲率双対性 [論文63]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21606250
12. 山岸勇輝 (2026). 規約と事実 [論文95]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758621
13. 山岸勇輝 (2026). 四次元にいると知っているのは誰か [論文114]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21963544

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)