

c comme boule de l'espace des vitesses

— Deuxième édition : c'était un résultat sur **c**, non sur **4π** (le **patch de Yamagishi** et la précession de Thomas)

— [Article 60]

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japon

Août 2026 (Deuxième édition)

— *From thinking to syncing.* —

Résumé

En relativité restreinte, l'ensemble des vitesses admissibles est une boule de rayon **c**, et pour la métrique induite par la loi d'addition des vitesses c'est un **espace hyperbolique de courbure $K = -1/c^2$** (Varičak 1910). **Ici la lecture de c comme rayon vaut littéralement, et non comme patch.** Cette courbure est **mesurée, sous la forme de la précession de Thomas — l'holonomie de l'espace des vitesses**. Sur cette géométrie connue, la première édition réécrivait l'énergie au repos $E = 4\pi c^2$ de la représentation $m = 4\pi$ (Article 12) comme la quantité intrinsèque $E = 4\pi/|K|$.

Ce que corrige la deuxième édition, c'est le statut de ce 4π .

Premièrement, le 4π de $E = 4\pi c^2$ ne peut pas être un angle solide. Puisque $[E] = ML^2T^{-2}$ alors que $[c^2] = L^2T^{-2}$, le facteur placé devant **doit porter une masse**. Un angle solide est sans dimension (dimension de masse $\mu = 0$) et ne peut pas se tenir là. Sous le patch $m = 4\pi$, ce 4π est la masse elle-même (Article 116 : $\varepsilon = \mu$) — c'est-à-dire **une convention, non une géométrie** (Article 56, 2e éd.).

Deuxièmement, $E = 4\pi/|K|$ exige la même lecture. $[1/|K|] = [c^2] = L^2T^{-2}$ est **une vitesse au carré, non une aire**. Lu comme angle solide, $4\pi/|K|$ serait une vitesse au carré et non une énergie. Le commentaire de la première édition — « 4π est l'angle solide, une constante géométrique fixe » — **n'est pas disponible** (Observation 3.3).

Troisièmement, la section 5 de la première édition a donc besoin de trois entrées, non de deux. Elle séparait à juste titre « le 4π de l'angle solide » du « $4\pi = 2\pi|\chi|$ topologique » ; mais **ce qui se tient dans $E = 4\pi c^2$ n'est ni l'un ni l'autre**. C'est une troisième chose — le patch de masse, une convention (Observation 5.2).

Quatrièmement, et ce qui reste est plus fort que ne le supposait la première édition. Le cœur est l'identité géométrique $c^2 = 1/|K|$, et elle n'a besoin d'aucun patch. Donc $E = mc^2 = m/|K|$ vaut pour tout m . Le 4π n'apporte rien de géométrique ; il **nomme seulement l'unité de masse**. Le résultat de cet article portait sur **c, non sur 4π** (Corollaire 3.5).

Et son point le plus fort — que la courbure est mesurée comme précession de Thomas — reste intact (Section 4).

Portée (scope note) : AUCUNE LOI PHYSIQUE NOUVELLE ET AUCUN THÉORÈME MATHÉMATIQUE

NOUVEAU N'EST REVENDIQUÉ. Que l'espace des vitesses soit hyperbolique (Varičak 1910), la précession de Thomas (Thomas 1926), l'aire d'une sphère géodésique hyperbolique et Gauss–Bonnet sont tous classiques. Ce qu'ajoute la deuxième édition est seulement **un jugement sur le 4π qui apparaît dans la formule.**

1. Notations et position

Position : Cet article ne revendique ni loi physique nouvelle ni théorème mathématique nouveau. Sa contribution est de réécrire $E = 4\pi c^2$ (Article 12) sur cette géométrie connue **comme une quantité intrinsèque indépendante des coordonnées**, et de **séparer ce qui est intrinsèque et quel 4π a quelle origine.**

Ajouté dans la deuxième édition : La première édition séparait les origines de 4π en deux. **La deuxième édition montre que ce qui se tient réellement dans la formule est une troisième.**

2. L'espace des vitesses est hyperbolique de courbure $-1/c^2$ (connu)

Proposition 2.1 (la géométrie hyperbolique de l'espace des vitesses ; Varičak 1910) : En relativité restreinte, les vitesses physiques forment la boule $\{v \in \mathbb{R}^3 : |v| < c\}$ de rayon c . Pour la métrique induite par la loi d'addition des vitesses,

$$ds^2 = c^2 [d\varphi^2 + \sinh^2 \varphi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\psi^2)], \quad \varphi = \operatorname{artanh} \frac{v}{c} \quad (1)$$

cet espace est **l'espace hyperbolique de dimension trois de courbure sectionnelle $K = -1/c^2$** . Le bord $|v| = c$ correspond à l'infini hyperbolique (la lumière).

Observation 2.2 (deuxième édition : la rapidité n'est pas la distance) : La première édition disait que « la rapidité φ est égale à la distance hyperbolique au centre ». **φ est sans dimension**, et la distance au centre dans (1) est $r = c\varphi$. De fait, la formule d'aire qu'utilise la première édition à la section 3 s'écrit $\sinh^2(r/c) = \sinh^2 \varphi$ précisément parce que $r = c\varphi$. **Le texte de la première édition était en désaccord avec sa propre formule d'aire d'un facteur c .** La deuxième édition le corrige.

Ce qui compte ici, c'est que c est à la fois un rayon de coordonnées et un rayon de courbure intrinsèque :

$$K = -1/c^2 \iff c^2 = 1/|K|.$$

3. L'expression intrinsèque de $E = 4\pi c^2$, et le statut de son 4π

Proposition 3.1 (corroboration comme échelle d'aire, inchangée) : Dans l'espace hyperbolique de dimension trois de courbure $-1/c^2$, l'aire d'une sphère géodésique de rayon r est

$$A(r) = 4\pi c^2 \sinh^2\left(\frac{r}{c}\right) \quad (2)$$

et se réduit à $4\pi r^2$ quand $r \rightarrow 0$ (vérifié ici par développement en série). Ainsi $4\pi c^2$ est l'échelle d'aire intrinsèque fixée par la courbure, non une quantité dépendant des coordonnées. Cette proposition est correcte et inchangée dans la deuxième édition.

Proposition 3.2 (l'expression intrinsèque de E) : La représentation $m = 4\pi$ ($E = 4\pi c^2$, Article 12) peut s'écrire à l'aide de la courbure intrinsèque de l'espace des vitesses comme

$$E = 4\pi c^2 = \frac{4\pi}{|K|} \quad (3)$$

où $1/|K|$ est indépendant des coordonnées.

3.1 [Deuxième édition] Ce 4π n'est pas un angle solide

Observation 3.3 (les dimensions tranchent) : La première édition commentait (3) par « 4π est l'angle solide, une constante géométrique fixe ». Cette lecture n'est pas disponible.

Quantité	Dimension	Dimension de masse μ
E	ML^2T^{-2}	1
$c^2, 1/ K $	L^2T^{-2}	0
angle solide $\int_{S^2} d\Omega$	sans dimension	0
patch de masse $m = 4\pi$	M	1

Puisque E porte la dimension de masse 1 tandis que c^2 et $1/|K|$ portent 0, le facteur placé devant doit porter la dimension de masse 1. Un angle solide, étant sans dimension, ne peut pas se tenir là. Ainsi le 4π de $E = 4\pi c^2$ est la masse elle-même — comme l'a montré l'Article 116, la puissance de la constante du patch est exactement la dimension de masse ($\epsilon = \mu$).

Observation 3.4 ($1/|K|$ n'est pas une aire) : De même, $[1/|K|] = [c^2] = L^2T^{-2}$ est une vitesse au carré, non une aire. La lecture de la première édition, « l'angle solide fois le carré du rayon de courbure intrinsèque de l'espace des vitesses », contient deux mauvais placements à la fois : elle rend le facteur de gauche sans dimension et appelle aire le facteur de droite.

Le $4\pi c^2$ de la Proposition 3.1 est une aire — parce que là le 4π (un angle solide) multiplie une distance au carré. Le $4\pi c^2$ de (3) est une énergie — parce que là le 4π (une masse) multiplie une vitesse au carré. La même suite de symboles

désigne des quantités différentes dans deux sections d'un même article.

C'est la forme que l'Article 51 a exhibée pour le théorème des coquilles : le 4π qui survivait dans la réponse était la convention, non la géométrie.

3.2 [Deuxième édition] Ce qui reste — plus fort que ne le supposait la première édition

Corollaire 3.5 (le cœur est $c^2 = 1/|K|$, et il n'a besoin d'aucun patch) : Retirez le 4π de cette section et ce qui reste est

$$c^2 = \frac{1}{|K|} \quad \Rightarrow \quad E = mc^2 = \frac{m}{|K|} \quad (\text{pour tout } m) \quad (4)$$

L'identité géométrique selon laquelle c^2 est le carré du rayon de courbure de l'espace des vitesses est le cœur de cet article, et elle n'a besoin d'aucun patch. Le 4π n'apporte rien de géométrie ; il nomme seulement l'unité de masse.

Le résultat de cet article portait donc sur c , non sur 4π — et il n'en est que plus robuste, puisqu'il vaut aussi pour un lecteur qui n'adopte pas la convention $m = 4\pi$.

Corollaire 3.6 (l'énergie comme inverse de la courbure, reformulé) : De $E = m/|K|$, l'échelle d'énergie est proportionnelle à l'inverse de la courbure de l'espace des vitesses. Dans la limite où l'espace des vitesses s'aplatit ($c \rightarrow \infty$, la limite newtonienne, $|K| \rightarrow 0$), l'échelle d'énergie diverge. Cette lecture vaut quel que soit m .

4. La courbure est mesurée : précession de Thomas (inchangé)

Proposition 4.1 (la précession de Thomas comme holonomie de l'espace des vitesses) : Transporter parallèlement un spin le long d'un circuit fermé dans l'espace des vitesses (accélérer, tourner, décélérer) produit une rotation nette — la rotation de Thomas–Wigner. Son angle est égal à la valeur absolue $|K|$ de la courbure multipliée par l'aire hyperbolique enclose (le défaut angulaire).

(Une petite correction de la deuxième édition) La première édition écrivait « le produit de K et de l'aire » ; comme K est négatif, ce qui est égal au défaut est $|K|$ fois l'aire. Le fond est inchangé.

La courbure de l'espace des vitesses n'est donc pas une image géométrique mais une quantité mesurée — le facteur de Thomas $1/2$ du couplage spin-orbite atomique en est la manifestation.

Cette section est le point le plus fort de l'article et n'est pas modifiée dans la deuxième édition. La lecture « c est le rayon de courbure intrinsèque de l'espace des vitesses » repose sur une géométrie mesurable.

5. Discipline : quel 4π , quelle dimension

Proposition 5.1 (séparation d'avec le 4π topologique, inchangée) : Pour une surface fermée de courbure $-1/c^2$, Gauss–Bonnet donne

$$\int K dA = 2\pi\chi = 2\pi(2 - 2g) \implies A = 4\pi c^2(g - 1) \quad (5)$$

de sorte que $A = 4\pi c^2$ au genre $g = 2$ (vérifié ici). Ce $4\pi = 2\pi|\chi|$ provient de la caractéristique d’Euler et a une autre racine que l’angle solide (Articles 48, 67). Un accord numérique ne doit pas être pris pour une identité.

5.1 [Deuxième édition] Deux entrées ne suffisent pas

Observation 5.2 (il y en a une troisième — et c’est celle de la formule) : La première édition séparait les origines de 4π en l’angle solide et le topologique. La séparation est juste, mais le recensement est incomplet.

4π	Origine	μ	Statut
angle solide $\int_{S^2} d\Omega$	la géométrie de la sphère (Article 01)	0	fait
$2\pi \chi $ en $g = 2$	la caractéristique d’Euler (Article 67)	0	fait
patch de masse $m = 4\pi$	un choix d’unités (Articles 56, 116)	1	convention

Et ce qui se tient dans $E = 4\pi c^2$ est la troisième (Observation 3.3). La première édition séparait soigneusement deux faits et négligeait la convention qui se tenait réellement dans sa formule.

Le 4π de $A(r) = 4\pi c^2 \sinh^2(r/c)$ dans la Proposition 3.1 est la première. Au sein d’un même article, la première et la troisième étaient écrites avec le même symbole — la source de la confusion de la première édition.

Une note sur la dimension (inchangée) : L’espace des vitesses a la même dimension que l’espace des positions, à savoir trois. Le $d = 3$ ici est donc une autre dimension, selon un autre critère, que le $d = 5$ de l’Article 59. **La deuxième édition de l’Article 59 a depuis montré que son $d = 5$ découle de la fixation du rayon à un (une convention), tout en affirmant que la lecture de c comme rayon vaut littéralement pour la boule des vitesses** — ce dernier point ayant le même contenu que la Proposition 2.1 ici.

6. Conclusion

1. L’espace des vitesses est une boule de rayon c et il est hyperbolique de courbure $K = -1/c^2$ (Proposition 2.1 ; Varičák 1910). Ici la lecture de c comme rayon vaut littéralement.
2. [2e éd.] La rapidité n’est pas la distance — φ est sans dimension et la distance est $c\varphi$. Le texte de la première édition était en désaccord avec sa propre formule d’aire d’un facteur c (Observation 2.2).
3. $A(r) = 4\pi c^2 \sinh^2(r/c)$ se réduit à $4\pi r^2$ quand $r \rightarrow 0$, ce qui corrobore $4\pi c^2$ comme l’échelle d’aire intrinsèque fixée par la courbure (Proposition 3.1, inchangée).

4. [2e éd.] Le 4π de $E = 4\pi c^2$ n'est pas un angle solide — puisque $[E]$ a la dimension de masse **1** tandis que $[c^2]$ et $[1/|K|]$ ont **0**, le facteur placé devant **doit être une masse**, et un angle solide, étant sans dimension, ne peut pas se tenir là. **Ce 4π est le patch de masse, c'est-à-dire une convention** (Observations 3.3, 3.4). C'est la forme de l'Article 51.
5. [2e éd.] Le recensement des 4π a donc besoin de trois entrées — angle solide (fait), $2\pi|\chi|$ topologique (fait), patch de masse (convention). **Ce qui se tient dans $E = 4\pi c^2$ est la troisième ; ce qui se tient dans $A(r)$ est la première.** Un symbole désignait deux quantités au sein d'un même article (Observation 5.2).
6. [2e éd.] **Ce qui reste est plus fort que ne le supposait la première édition** — le cœur est l'identité géométrique $c^2 = 1/|K|$, qui n'a besoin d'aucun patch, et $E = mc^2 = m/|K|$ vaut pour tout m . **Le résultat portait sur c , non sur 4π** (Corollaires 3.5, 3.6).
7. **La courbure est mesurée comme précession de Thomas** (Proposition 4.1, inchangée) : le défaut vaut $|K|$ fois l'aire hyperbolique enclose et se manifeste dans le facteur de Thomas **$1/2$** du couplage spin-orbite atomique. **C'est le point le plus fort de l'article et il n'est pas modifié.**

Conclusion : La première édition séparait soigneusement deux origines de 4π et mettait en garde contre leur confusion. **La mise en garde était juste ; seul le compte était incomplet** — il y en avait une troisième qui se tenait dans la formule elle-même, le 4π qui est une convention. Retirez-le, et **ce qui reste est plus ferme que ce qui était là** : c^2 est le carré du rayon de courbure de l'espace des vitesses, et cette courbure est mesurée comme précession de Thomas. **Retirer le patch n'affaiblit pas toujours un résultat ; parfois il le renforce.**

Références

1. Einstein, A. (1905). *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*. Annalen der Physik, 322(10), 891–921.
2. Varičak, V. (1910). *Anwendung der Lobatschewskijschen Geometrie in der Relativtheorie*. Physikalische Zeitschrift, 11, 93–96.
3. Thomas, L. H. (1926). *The motion of the spinning electron*. Nature, 117, 514.
4. Wigner, E. P. (1939). *On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group*. Annals of Mathematics, 40, 149–204.
5. Yamagishi, Y. (2026). *The Uniqueness Theorem of $n = 2$ for Spherically Symmetric Density Distributions* [Article 01]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21403186
6. Yamagishi, Y. (2026). *From Boundary Energy to Volume Energy: The Einstein-Yamagishi Volume Restoration Equation and the Overclock Pythagoras Theorem* [Article 12]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21404703
7. Yamagishi, Y. (2026). *The Yamagishi Overclock Temperature Equation: Derivation of $kT = \frac{4}{3}\pi v^2$ and Consistency with the Standard Equation of State* [Article 20]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21601035
8. Yamagishi, Y. (2026). *The Pfaffian's $2^n n!$ Is One Block* [Article 48], 3rd ed. Zenodo. 10.5281/zenodo.21602525
9. Yamagishi, Y. (2026). *The Yamagishi Gravitational Multipole Aggregation Theory* [Article 51], 3rd ed. Zenodo. 10.5281/zenodo.21602935

10. Yamagishi, Y. (2026). *A Structural Study of the 4π Patch* [Article 56], 2nd ed. Zenodo. 10.5281/zenodo.21597500
11. Yamagishi, Y. (2026). *The Volume of the Unit Ball Is Greatest in Five Dimensions* [Article 59], 2nd ed. Zenodo. 10.5281/zenodo.21597865
12. Yamagishi, Y. (2026). *The Velocity–Spacetime Curvature Duality* [Article 63]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21606250
13. Yamagishi, Y. (2026). *The Euler-Characteristic Origin of the 4π Patch* [Article 67]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21642170
14. Yamagishi, Y. (2026). *Convention and Fact* [Article 95]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758621
15. Yamagishi, Y. (2026). *The Geometry Where the Invariant Lives* [Article 108]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21837313
16. Yamagishi, Y. (2026). *What Does the Exponent of $\mathfrak{c}$ Count?* [Article 116]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22003794

— *From thinking to syncing.* —

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)