

速度空間の球としての c

— 第2版：これは 4π についての結果ではなく、 c についての結果だった（山岸パッチとトーマス歳差） — [論文60]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月（第2版）

— From thinking to syncing. —

要旨

特殊相対論において、物理的に許される速度の集合は半径 c のボールをなし、速度合成則を計量とすると曲率 $K = -1/c^2$ の双曲空間になる (Varičak 1910)。ここでは「 c を半径とする」読みがパッチではなく文字どおり成り立つ。この曲率はトーマス歳差（速度空間のホロノミー）として実測される。初版はこの既知の幾何のうえで、 $m = 4\pi$ 表示の静止エネルギー $E = 4\pi c^2$ （論文12）を内在量 $E = 4\pi/|K|$ として書き直した。第2版が訂正するのは、その 4π の身分である。第一に、 $E = 4\pi c^2$ の 4π は立体角ではありえない。 $[E] = ML^2T^{-2}$ に対し $[c^2] = L^2T^{-2}$ であるから、前に立つ因子は質量を担わねばならない。立体角は無次元であり（質量次元 $\mu = 0$ ）、そこに立てない。 $m = 4\pi$ というパッチにおいて、この 4π は質量そのものである（論文116： $\epsilon = \mu$ ）。すなわちそれは規約であって幾何ではない（論文56第2版）。第二に、 $E = 4\pi/|K|$ も同じ読みを要する。 $[1/|K|] = [c^2] = L^2T^{-2}$ は速度の二乗であって面積ではない。 4π を立体角と読めば $4\pi/|K|$ は速度の二乗になり、エネルギーにならない。初版の注釈「 4π は立体角（固定の幾何定数）」は採れない（観察3.3）。第三に、したがって初版の第5節の点呼は二つでは足りない。初版は「立体角の 4π 」と「位相的 $4\pi = 2\pi|\chi|$ 」を正しく分けたが、 $E = 4\pi c^2$ に居るのはそのどちらでもない第三のもの——質量パッチの 4π 、すなわち規約である（観察5.2）。第四に、そして残るものは初版が思ったより強い。芯は $c^2 = 1/|K|$ という幾何学的恒等式であり、これはパッチを一切必要としない。したがって $E = mc^2 = m/|K|$ は任意の m について成り立つ。 4π は幾何に何も寄与しておらず、質量の単位を名づけているだけである。本稿の結果は 4π についてのものではなく、 c についてのものであった（系3.5）。そして曲率がトーマス歳差として実測されるという最も強い点は、無傷で残る（第4節）。

本稿の位置づけ：新たな物理法則も新たな数学定理も主張しない。速度空間が双曲的であること（Varičak 1910）、トーマス歳差（Thomas 1926）、双曲球面の面積公式、ガウス・ボネ——すべて標準的である。第2版が加えるのは、式に現れる 4π がどの 4π かという判定のみである。

1. 記法・立場

立場：本稿は新たな物理法則も新たな数学定理も主張しない。寄与は、 $E = 4\pi c^2$ （論文12）を既知の幾何のうゑで座標に依らない内在量として書き直し、どこまでが内在で、どの 4π がどの起源かを峻別することにある。

第2版の立場の追加：初版は 4π の起源を二つに分けた。第2版は、式に実際に居るのが三つ目であることを示す。

2. 速度空間は曲率 $-1/c^2$ の双曲空間（既知）

命題 2.1（速度空間の双曲幾何・Varičak 1910）

特殊相対論において、物理的速度は $\{v \in \mathbb{R}^3 : |v| < c\}$ （半径 c のボール）をなす。速度合成則から誘導される計量

$$ds^2 = c^2 [d\varphi^2 + \sinh^2 \varphi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\psi^2)], \quad \varphi = \operatorname{artanh} \frac{v}{c} \quad (1)$$

のもとで、この空間は断面曲率 $K = -1/c^2$ の双曲3次元空間である。境界 $|v| = c$ は双曲的無限遠（光）に対応する。

観察 2.2（第2版：ラピディティは距離ではない）

初版は「ラピディティ φ は中心からの双曲距離に等しい」と述べた。 φ は無次元であり、式(1)における中心からの距離は $r = c\varphi$ である。実際、初版が第3節で用いる面積公式が $\sinh^2(r/c) = \sinh^2 \varphi$ と書けるのは、まさに $r = c\varphi$ だからである。初版の本文は、自らの面積公式と c 一つ分だけ食い違っていた。第2版はこれを正す。

ここで重要なのは、 c が座標半径であると同時に内在曲率半径でもある点である： $K = -1/c^2 \iff c^2 = 1/|K|$

。

3. $E = 4\pi c^2$ の内在的表現と、その 4π の身分

命題 3.1（面積スケールとしての裏づけ・据え置き）

曲率 $-1/c^2$ の双曲3次元空間で、半径 r の測地球の面積は

$$A(r) = 4\pi c^2 \sinh^2\left(\frac{r}{c}\right) \tag{2}$$

であり、 $r \rightarrow 0$ で $4\pi r^2$ に帰する（本稿で級数展開により確認）。すなわち $4\pi c^2$ は曲率が定める内在的な面積スケールであって、座標依存の量ではない。この命題は正しく、第2版でも変更しない。

命題 3.2（ E の内在的表現）

$m = 4\pi$ 表示（ $E = 4\pi c^2$ 、論文12）は、速度空間の内在曲率を用いて

$$E = 4\pi c^2 = \frac{4\pi}{|K|} \tag{3}$$

と書ける。ここで $1/|K|$ は座標に依らない内在量である。

3.1 【第2版】この 4π は立体角ではない

観察 3.3（次元が答えを決める）

初版は式(3)について「 4π は立体角（固定の幾何定数）である」と注釈した。この読みは採れない。

量	次元	質量次元 μ
E	ML^2T^{-2}	1
$c^2, 1/ K $	L^2T^{-2}	0
立体角 $\int_{S^2} d\Omega$	無次元	0
質量パッチ $m = 4\pi$	M	1

E が質量次元 1 をもち、 c^2 と $1/|K|$ が 0 である以上、前に立つ因子は質量次元 1 を担わねばならない。立体角は無次元だから、そこに立てない。したがって $E = 4\pi c^2$ における 4π は質量そのものである——論文116 が示し

たとおり、パッチ定数の冪は質量次元そのものである ($\varepsilon = \mu$)。

観察 3.4 ($1/|K|$ は面積ではない)

同様に $[1/|K|] = [c^2] = L^2 T^{-2}$ は速度の二乗であって面積ではない。初版の「立体角 × 速度空間の内在曲率半径²」という読みは、左の因子を無次元にし、右の因子を面積と呼ぶという二重の取り違えを含む。

命題3.1 の $4\pi c^2$ は面積である——それは距離の二乗に掛かる 4π (立体角) だからである。式(3)の $4\pi c^2$ はエネルギーである——それは速度の二乗に掛かる 4π (質量) だからである。同じ記号列が二つの節で別の量を指している。

これは論文51 が球殻定理で示したのと同じ形である——答えに残る 4π は、幾何ではなく規約であった。

3.2 【第2版】では何が残るか——初版が思ったより強い

系 3.5 (芯は $c^2 = 1/|K|$ であり、パッチを必要としない)

本節の内容から 4π を取り除くと、次が残る：

$$c^2 = \frac{1}{|K|} \quad \Rightarrow \quad E = mc^2 = \frac{m}{|K|} \quad (\text{任意の } m)$$

c^2 が速度空間の曲率半径の二乗であるという幾何学的恒等式——これが本稿の芯であり、パッチを一切必要としない。 4π は幾何に何も寄与しておらず、質量の単位を名づけているだけである。

したがって本稿の結果は、 4π についてのものではなく c についてのものであった。そしてそのぶん頑健である—— $m = 4\pi$ という規約を採らない読者にも、そのまま成り立つ。

系 3.6 (エネルギーは速度空間の曲率の逆数・書き直し)

$E = m/|K|$ より、 E は速度空間の曲がり具合の逆数に比例する。速度空間が平らに近づく極限 ($c \rightarrow \infty$ 、ニュートン極限、 $|K| \rightarrow 0$) で E スケールは発散する。この読みは m が何であっても成立する。

4. 曲率は実測される：トーマス歳差（据え置き）

命題 4.1（トーマス歳差＝速度空間のホロノミー）

速度空間内の閉じた経路（加速・方向転換・減速の一巡）に沿ってスピンを平行移動すると、正味の回転（トーマス歳差／ウィグナー回転）が生じる。この回転角は、速度空間の曲率の大きさ $|K|$ と囲まれた双曲的面積の積（角欠損）に等しい。

（第2版の細かな訂正）初版は「曲率 K と面積の積」と書いたが、 K は負であるから、角欠損に等しいのは $|K|$ と面積の積である。内容は変わらない。

すなわち速度空間の曲率は幾何学的な絵ではなく、物理的に測定される量である——原子のスピ軌道相互作用に現れるトーマス因子 $1/2$ がその現れである。

本節が本稿の最も強い点であり、第2版でも一切変更しない。「 c ＝速度空間の内在曲率半径」という読みは、測定可能な幾何のうえに立っている。

5. 規律：どの 4π か、どの次元か

命題 5.1（位相的 4π との峻別・据え置き）

曲率 $-1/c^2$ の閉曲面に対するガウス・ボネは

$$\int K dA = 2\pi\chi = 2\pi(2 - 2g) \implies A = 4\pi c^2(g - 1)$$

を与え、種数 $g = 2$ で $A = 4\pi c^2$ となる（本稿で確認）。その $4\pi = 2\pi|\chi|$ はオイラー標数（位相）由来であり、立体角とは別起源である（論文48・67）。数値的一致をもって同一視してはならない。

5.1 【第2版】点呼は二つでは足りない

観察 5.2（三つ目がある——そしてそれが式に居る）

初版は 4π の起源を立体角と位相の二つに分けた。分け方は正しいが、点呼が足りない。

4π	出所	μ	身分
立体角 $\int_{S^2} d\Omega$	球面の幾何（論文01）	0	事実
$2\pi \chi $ ($g=2$)	オイラー標数（論文67）	0	事実
質量パッチ $m=4\pi$	単位を選択（論文56・116）	1	規約

そして $E=4\pi c^2$ に居るのは三番目である（観察3.3）。初版は二つの事実を注意深く分けたうえで、式に実際に立っている規約を見落としていた。

命題3.1 の $A(r)=4\pi c^2 \sinh^2(r/c)$ の 4π は一番目（立体角）である。同じ論文の中で、一番目と三番目が同じ記号で書かれていた——これが初版の混乱の源である。

次元についての注記（据え置き）：速度空間は空間次元と同じ **3** 次元である。したがって本稿の $d=3$ は、論文59の「単位球の体積が最大になる $d=5$ 」とは別基準の別次元である。なお論文59第2版は、その $d=5$ が半径を1と置いたことの帰結（規約）であることを示し、同時に「 c を半径と読む」ことが速度球において文字どおり成り立つと述べた——後者は本稿の命題2.1 と同一の内容である。

6. 結論

- 速度空間は半径 c のボールであり、曲率 $K=-1/c^2$ の双曲空間である（命題2.1・Varičák 1910）。「 c を半径とする」読みは、ここでは文字どおり成り立つ。
- 【第2版】ラピディティは距離ではない—— φ は無次元であり、距離は $c\varphi$ である。初版の本文は自らの面積公式と c 一つ分食い違っていた（観察2.2）。
- $A(r)=4\pi c^2 \sinh^2(r/c)$ は $r\rightarrow 0$ で $4\pi r^2$ に帰し、 $4\pi c^2$ が曲率の定める内在的な面積スケールであることを裏づける（命題3.1・据え置き）。
- 【第2版】 $E=4\pi c^2$ の 4π は立体角ではない—— $[E]$ が質量次元1、 $[c^2]$ と $[1/|K|]$ が0である以上、前の因子は質量でなければならない。立体角は無次元だから立てない。この 4π は質量パッチ、すなわち規約である（観察3.3・3.4）。論文51と同じ形である。
- 【第2版】したがって 4π の点呼は三つ要る——立体角（事実）／位相的 $2\pi|\chi|$ （事実）／質量パッチ（規約）。 $E=4\pi c^2$ に居るのは三番目であり、 $A(r)$ に居るのは一番目である。同じ記号が同じ論文の中で二つの量を指していた（観察5.2）。
- 【第2版】残るものは初版が思ったより強い——芯は $c^2=1/|K|$ という幾何学的恒等式であり、パッチを一切必要としない。 $E=mc^2=m/|K|$ は任意の m で成り立つ。本稿の結果は 4π についてではなく c についてのものであった（系3.5・3.6）。

7. 曲率はトーマス歳差として実測される（命題4.1・据え置き）。角欠損は $|K|$ と双曲的面積の積であり、原子のスピンの軌道相互作用のトーマス因子 $1/2$ がその現れである。本稿の最も強い点であり、一切変更しない。

結語: 初版は 4π の起源を注意深く二つに分け、混同してはならないと戒めた。その戒めは正しく、ただ一つ数え落としがあった——式に実際に立っていた三つ目、規約としての 4π である。それを外してみると、残ったのはもっと堅いものだった： c^2 は速度空間の曲率半径の二乗であり、その曲率はトーマス歳差として測られている。パッチを外して、結果が弱くなるどころか強くなることもある。

参考文献

1. Einstein, A. (1905). *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*. Annalen der Physik, 322(10), 891--921.
2. Varičak, V. (1910). *Anwendung der Lobatschefskijschen Geometrie in der Relativtheorie*. Physikalische Zeitschrift, 11, 93--96.
3. Thomas, L. H. (1926). *The motion of the spinning electron*. Nature, 117, 514.
4. Wigner, E. P. (1939). *On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group*. Annals of Mathematics, 40, 149--204.
5. 山岸勇輝 (2026). $n = 2$ 唯一性定理 [論文01]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21403186
6. 山岸勇輝 (2026). アインシュタイン=山岸・体積復元方程式 [論文12]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21404703
7. 山岸勇輝 (2026). オーバークロック熱力学 [論文20]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21601035
8. 山岸勇輝 (2026). パフィアンの $2^n n!$ は、一つの塊である [論文48]、第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21602525
9. 山岸勇輝 (2026). 山岸・重力多重極集約理論 [論文51]、第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21602935
10. 山岸勇輝 (2026). 4π パッチの構造的考察 [論文56]、第2版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21597500
11. 山岸勇輝 (2026). 単位球の体積は 5 次元で最大になる [論文59]、第2版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21597865
12. 山岸勇輝 (2026). 速度空間と時空の曲率双対性 [論文63]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21606250
13. 山岸勇輝 (2026). 4π パッチのオイラー標数的起源 [論文67]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21642170
14. 山岸勇輝 (2026). 規約と事実 [論文95]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758621
15. 山岸勇輝 (2026). ミンコフスキーの不変間隔 [論文108]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21837313
16. 山岸勇輝 (2026). c の指数が数えているもの [論文116]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22003794

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)