6 次のラテン方陣には、直交する相手が一つも無い

— 一行目と一列目を揃えた 6 次の方陣 9408 個のうち、直交する相手を持つ方陣は 0 個 — 多くは横断を持つのに、6 本の交わらない横断には一つも分けられない — [論文604]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

n 次のラテン方陣は、$n \times n$ のます目に n 種類の記号を、どの行にもどの列にも一つずつ現れるように並べたものである。二つのラテン方陣を重ねたとき、記号の組 n^2 通りがすべて一度ずつ現れるなら、二つは直交するという。オイラーは、六つの連隊から六つの位の士官を一人ずつ、どの行にもどの列にも各連隊・各位が一人ずつ並ぶように立たせられるかを問うた——6 次の直交する方陣の組があるかという問いである。新しい定理も法則も主張しない。 第一に、6 次の方陣は、一行目と一列目を揃えると 9408 個である——揃えた方陣を作り尽くすと、1 次から 6 次で $1, 1, 1, 4, 56, 9408$ 個だった。揃える前の全数は 4 次で 576、5 次で 161280 で、どちらも作り尽くして数えた値と一致した（第2節）。 第二に、これが本稿の芯である。6 次の 9408 個のどれにも、直交する相手が無い——相手があることは、方陣を n 本の交わらない横断（どの行・どの列・どの記号からも一つずつ選んだ n 個のます）に分けられることと同じである。9408 個すべてで調べ、分けられる方陣は 0 個だった（第3節）。 第三に、小さい次数には相手がある——相手を持つ方陣は、2 次で 0 個、3 次で 1 個中 1 個、4 次で 4 個中 1 個、5 次で 56 個中 6 個である。3 次と 4 次は、横断で調べた答と、相手の候補を全部重ねてみる総当たりの答が、方陣ごとに一致した（第3節）。 第四に、横断が無いから相手が無いのではない——6 次の方陣のうち横断を 1 本も持たないのは 2100 個（**0.223214**）で、残りは 8 本が 7020 個、24 本が 108 個、32 本が 180 個の横断を持つ。それでも、交わらない 6 本には一つも分けられない（第3節）。 第五に、分離子は「偶数か」ではなく「6 か」である——$i + j$ を n で割った余りを並べた方陣は、偶数次（2・4・6）で横断が 0 本、奇数次で 3・15・133 本だった。だが 4 次では、別の方陣（クラインの四元群の表）が横断 8 本を持って相手を持つ。偶数の方陣がみな相手を持たないのではなく、6 次だけが全部の方陣で相手を持たない（第4節）。 キーワード：ラテン方陣、直交ラテン方陣、三十六人の士官の問題、横断、組合せ論。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——オイラーの問い（1782）、6 次に直交する組が無いこと（タリー、1900）、10 次以上ではオイラーの予想が外れること（ボース、シュリカンデ、パーカー、1960）、小さいラテン方陣の個数（マッケイ、マイネルト、マーヴォルド、2007）は、いずれも既知である。タリーの証明を再現しない——一行目と一列目を揃えた 9408 個を作り尽くし、一つずつ横断で調べるだけである。10 次以上は計算しない——オイラーの予想（4 で割って 2 余る次数には組が無い）が外れる側は、既知の結果として述べるだけである。実験計画での使い方は扱わない。既刊との関係：論文247 は「偶数と奇数で分かれる」を八つに数えた——偶数次の巡回の方陣に横断が無いのは偶奇の分かれの一つだが、6 次の不在はそれでは説明できない。加えたのは、6 次の揃えた方陣 9408 個の横断の本数の分布を出したこと、3・4 次で横断の方法と総当たりを方陣ごとに突き合わせたこと、分離子を「偶数か」ではなく「6 か」に置き、偶数次の巡回の方陣と 4 次のクラインの四元群の表を並べて確かめたことである。

1. 記法と問い

設定：n 次のラテン方陣 L は、記号 $0, 1, \ldots, n-1$ を $n \times n$ のます目に、どの行にもどの列にも一つずつ現れるように並べたものである。二つの方陣 L, M は、組 (L_{ij}, M_{ij}) が n^2 通りすべて一度ずつ現れるとき直交するという。L の横断とは、どの行からもどの列からも一つずつ選んだ n 個のますで、その記号がすべて違うものである。

相手と横断：L に直交する M があれば、M で同じ記号が置かれた n 個のますは L の横断になり、それが n 本で全部のますを分ける。逆に、L を n 本の交わらない横断に分けられれば、横断ごとに記号を置いて M が作れる。

揃えてよい理由：L と M の行を同じように並べ替えても、列を同じように並べ替えても、直交は保たれる。どの方陣も、列を並べ替えて一行目を $0, 1, \ldots, n-1$ にし、残りの行を並べ替えて一列目も $0, 1, \ldots, n-1$ にできる。だから相手の有無は、一行目と一列目を揃えた方陣（簡約した方陣）だけ調べれば分かる。

問い：6 次の方陣に直交する相手はあるか。無いなら、それは横断が無いからか。偶数次だからか。

2. 方陣を作り尽くす

計算 2.1：簡約した方陣を、ますを一つずつ埋める探索で作り尽くした。

次数	1	2	3	4	5	6
簡約した方陣	1	1	1	4	56	9408

計算 2.2：揃えない方陣を作り尽くして数えると、4 次で 576、5 次で 161280 個だった。これは $n!(n-1)!$ に簡約の数を掛けた $4!3! \times 4 = 576$、$5!4! \times 56 = 161280$ とそれぞれ一致する。同じ掛け算で、6 次の全数は $6!5! \times 9408 = 812851200$ である。

> **観察 2.3**
>
> 二つの数え方が合った。揃えた方陣の数と、揃えない方陣の全数の二つを別々に作り尽くして、掛け算の関係が 4 次と 5 次で成り立った——9408 はマッケイらが示した値でもある。

3. 相手を探す

計算 3.1：簡約した方陣ごとに横断を全部数え、n 本の交わらない横断に分けられるか（相手があるか）を調べた。

次数	簡約した方陣	相手を持つ方陣	横断の本数（その本数を持つ方陣の数）
2	1	0	0 本（1）
3	1	1	3 本（1）
4	4	1	0 本（3）・8 本（1）
5	56	6	3 本（50）・15 本（6）
6	9408	0	0 本（2100）・8 本（7020）・24 本（108）・32 本（180）

5 次で相手を持つ 6 個は、横断を 15 本持つ 6 個とちょうど一致した。

計算 3.2：横断の方法とは独立に、3 次と 4 次では、揃えない方陣を全部（3 次 12 個、4 次 576 個）重ねてみて直交するものがあるかを総当たりで調べた。相手を持つ簡約した方陣は 3 次で 1 個、4 次で 1 個で、横断の方法の答と方陣ごとに一致した。

> **観察 3.3**
>
> これが本稿の芯である。6 次には、相手を持つ方陣が一つも無い。三十六人の士官は、どう並べても揃わない——これはタリーが 1900 年に示したことで、本稿は簡約した 9408 個を一つずつ調べてそれを確かめた。

観察 3.4

横断が無いから相手が無いのではない。6 次で横断を 1 本も持たない方陣は 2100 個（割合 **0.223214**）だけで、7308 個は 8 本以上の横断を持つ。最多は 32 本である——横断は十分あっても、互いに交わらない 6 本を選び出せない。問題は本数ではなく、組み合わせ方である。

4. 分離子

計算 4.1：i 行 j 列に $i+j$ を n で割った余りを置いた方陣（巡回の方陣）の横断を数えた。2 次から 7 次で、$0, 3, 0, 15, 0, 133$ 本だった。

観察 4.2

偶数次の巡回の方陣には横断が無い。2・4・6 次で 0 本、奇数次では 3・15・133 本ある——ここまでなら、偶数か奇数かで分かれる現象に見える。

観察 4.3

分離子は「偶数か」ではなく「6 か」である。4 次で相手を持つ唯一の簡約した方陣は、i と j を二進法で繰り上がりなしに足した表（クラインの四元群の表）で、横断を 8 本持つ。巡回の方陣とは別の方陣が、偶数次でも相手を持つ——4 次には相手を持つ方陣があり、6 次には無い。2 次を除けば、全部の方陣で相手が無いのは 6 次だけで、オイラーはこれが 4 で割って 2 余る次数すべてに及ぶと予想したが、10 次以上では外れた（ボース、シュリカンデ、パーカー）。

観察 4.4

論文247 と並べる。247 は「偶数と奇数で分かれる」を八つに数えた——偶数次の巡回の方陣に横断が無いのは、その一つに数えてよい偶奇の分かれである。だが 6 次の不在は偶奇の分かれではない。4 次は偶数でも相手を持つ。

> **観察 4.5**
>
> 言わないこと。タリーの証明を再現していない。10 次以上は計算していない。実験計画での使い方は扱わない——示したのは、6 次の簡約した 9408 個すべてに相手が無いこと、横断の本数の分布、そして「偶数か」が分離子ではないことである。

5. 点呼と結び

1. 簡約した方陣は $1, 1, 1, 4, 56, 9408$ 個（計算 2.1）：作り尽くした。
2. 4 次 576・5 次 161280 が掛け算と一致（計算 2.2）：二つの数え方。
3. 6 次の全数は 812851200（計算 2.2）：揃えれば 9408 で足りる。
4. 6 次で相手を持つ方陣は 0 個（計算 3.1）：本稿の芯。
5. 3・4・5 次では 1・1・6 個が相手を持つ（計算 3.1）：小さい次数にはある。
6. 3・4 次で横断と総当たりが方陣ごとに一致（計算 3.2）：二つの道筋。
7. 6 次で横断の無い方陣は 2100 個（**0.223214**）（観察 3.4）：残りは 8 本以上持つ。
8. 横断があっても 6 本に分けられない（観察 3.4）：本数ではなく組み合わせ方。
9. 偶数次の巡回の方陣は横断 0 本（計算 4.1）：偶奇の分かれに見える。
10. 4 次のクラインの四元群の表は相手を持つ（観察 4.3）：分離子は「6 か」。

結び：オイラーは、六つの連隊から六つの位の士官を一人ずつ、どの行にもどの列にも各連隊・各位が一人ずつ並ぶように立たせられるかを問うた。6 次のラテン方陣には、直交する相手が一つも無い——一行目と一列目を揃えた 6 次の方陣 9408 個を作り尽くし、一つずつ 6 本の交わらない横断に分けられるかを調べると、分けられる方陣は 0 個だった。3・4・5 次には相手を持つ方陣があり、3・4 次では横断の方法と総当たりが方陣ごとに一致した。横断が無いから相手が無いのではない——6 次で横断を持たないのは 2100 個だけで、多くは 8 本以上、最多で 32 本の横断を持つが、交わらない 6 本は選び出せない。分離子は「偶数か」ではなく「6 か」である——偶数次の巡回の方陣は横断を持たないが、4 次ではクラインの四元群の表が相手を持つ。既刊との位置——論文247 が数えた偶奇の分かれの隣に、偶奇では説明できない 6 次の不在を置く。正直に言えば——タリーの証明は再現しておらず、簡約した方陣の総当たりで確かめただけである。10 次以上でオイラーの予想が外れることは計算していない。

参考文献

1. Bose, R. C., Shrikhande, S. S., & Parker, E. T. (1960). Further results on the construction of mutually orthogonal Latin squares and the falsity of Euler’s conjecture. *Canadian Journal of Mathematics*.

2. Euler, L. (1782). Recherches sur une nouvelle espèce de quarrés magiques. *Verhandelingen uitgegeven door het zeeuwsch Genootschap der Wetenschappen te Vlissingen*.

3. McKay, B. D., Meynert, A., & Myrvold, W. (2007). Small Latin squares, quasigroups, and loops. *Journal of Combinatorial Designs*.

4. Tarry, G. (1900). Le problème des 36 officiers. *Compte Rendu de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences*.

5. 山岸勇輝 (2026). 『「偶数と奇数で分かれる」は、一つの現象ではない』[論文247]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22159832

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)