三目並べで先手が勝つ割合は、何を等しいと置くかで三つに分かれる

— 手順を等しく数えると先手の勝ちは **0.514108**、空いたますから等しく打つと **0.584921**、最善を尽くすと **0** — 同じ「先手が勝つ割合」が、三つの別の問いの答である — [論文607]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

三目並べは、**3 × 3** のますに二人が交互に印を置き、縦・横・斜めのどれかに自分の印を三つ並べた方が勝つ遊びである。「先手はどれだけ勝つか」を、三つの数え方で出す。新しい定理も法則も主張しない。 第一に、手順を等しく数えると、先手の勝ちは **0.514108** である——勝負がついた所で止める手順は **255168** 通りで、先手の勝ち **131184**、後手の勝ち **77904**、引き分け **46080** だった（第2節）。 第二に、でたらめに打つと、先手の勝ちは **0.584921** である——二人とも空いたますから等しい確率で選ぶと、先手の勝ちは正確に **737/1260**、後手は **121/420 = 0.288095**、引き分けは **8/63 = 0.126984** だった。乱数で **200000** 局打たせると先手の勝ちは **0.584060** で、式との差は **0.000861** だった（第3節）。 第三に、二人とも最善を尽くすと、先手の勝ちは **0** である——初めの局面の値は引き分けで、初手を **9** か所のどこに打っても引き分けだった（第4節）。 第四に、これが本稿の芯である。三つの数は、何を等しいと置くかの違いである——手順を一本ずつ等しく数えるか、一手ごとに空いたますを等しく選ぶか、互いに最善を選ぶか。でたらめに打つと、短く終わる手順ほど確率が大きく、先手の勝ちは早く決まるので、手順で数えたときより大きくなる（第5節）。 第五に、最善の側では、応手が一つ間違うだけで負ける——先手が角に打つと、後手の **8** か所の応手のうち **7** か所は負けに落ち、引き分けに残るのは中央だけである。先手が中央に打つと、辺の **4** か所が負けに落ちる（第4節）。 キーワード：三目並べ、ゲーム木、先手の勝率、最善手、数え方の重み。

> 本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——三目並べが最善同士で引き分けになること、手順が 255168 通り・局面が 5478 通りであることは、いずれも既知である。有限の対局が最善同士で決まった結果を持つことは、ツェルメロ（1913）以来知られている。定石を扱わない——最善の応手は、中央・角・辺の初手のあとの一手だけを示す。人の打ち方を論じない——「でたらめに打つ」は空いたますを等しい確率で選ぶことに限る。既刊との関係：論文164 は「確率」が頻度・信念・公理・文脈の四つの住所を持つと示した——本稿の三つの数は、同じ木の上で何を等しいと置くかの違いで、確率の置き場所が数を変える例である。論文602 はニムの局面を総当たりで解いた——三目並べも同じく木を全部たどって解けるが、ここでは勝ち負けそのものより、それを割合で言うときの重みが問題になる。加えたのは、同じ木から三つの割合を出して並べたこと、でたらめに打つ確率を分数で正確に出し、乱数と突き合わせたこと、分離子を「何を等しいと置くか」に置き、手順の長さが重みを変えることを示したことである。

1. 記法と問い

設定：ますに 0 から 8 の番号を左上から振る（中央が 4、角が $0,2,6,8$、辺が $1,3,5,7$）。先手と後手が交互に空いたますに印を置き、三つ並べた方が勝ち、九つ埋まって並ばなければ引き分けである。勝負がついた所で対局は止まる。

問い：「先手が勝つ割合」はいくらか。答は数え方でどう変わるか。

2. 手順を数える

計算 2.1：初めの局面から、勝負がつくまでの手順を全部たどって数えた。

結果	手順の数	割合
先手の勝ち	**131184**	**0.514108**
後手の勝ち	**77904**	**0.305305**
引き分け	**46080**	**0.180587**
合計	**255168**	**1**

計算 2.2：手順の途中に現れる局面（盤の印の置かれ方）は、初めの空の盤を入れて 5478 通りだった。回転と裏返しの 8 通りで重なるものをまとめると 765 通りになる。

> **観察 2.3**
>
> 手順で数えると、先手は半分をわずかに超えて勝つ。255168 通りの手順のうち、先手が勝って終わるのは 131184 通りである——これは「どの手順も一本として等しく数える」と置いたときの割合である。

3. でたらめに打つ

計算 3.1：二人とも、空いたますから等しい確率で一つを選んで打つとき、結果の確率を局面ごとに分数で正確に積み上げた。

結果	確率（分数）	小数
先手の勝ち	737/1260	0.584921
後手の勝ち	121/420	0.288095
引き分け	8/63	0.126984

三つの和はちょうど 1 である。乱数で 200000 局を打たせると、先手の勝ちは 0.584060 で、分数の値との差は 0.000861（乱数のばらつきの範囲）だった。

> **観察 3.2**
>
> でたらめに打つと、先手の勝ちは手順で数えたときより大きい。0.584921 対 0.514108 で、引き分けは逆に 0.126984 対 0.180587 と小さい——同じ木の上で数えているのに、答が違う。

4. 最善を尽くす

計算 4.1：先手は勝ちを、後手は先手の負けを最も大きくするように互いに選ぶとして、局面の値（先手の勝ち 1・引き分け 0・後手の勝ち −1）を終わりから決めた。初めの局面の値は 0 で、初手を 9 か所のどこに打っても値は 0 だった。

計算 4.2：初手のあと、後手の応手のうち負けに落ちるもの（値が 1 になるもの）を数えた。

先手の初手	負けに落ちる応手	引き分けに残る応手
中央（4）	辺の 1, 3, 5, 7	角の 4 か所
角（0）	1, 2, 3, 5, 6, 7, 8 の 7 か所	中央だけ
辺（1）	3, 5, 6, 8	残る 4 か所

> **観察 4.3**
>
> 最善同士なら、誰も勝たない。そして引き分けに残る道は細い。先手が角に打つと、後手は中央に打つほかに引き分ける手が無い——最善の側から見た「先手の勝ち」は 0 だが、それは応手を一つも誤らないときの話である。

5. 分離子

> **観察 5.1**
>
> これが本稿の芯である。三つの数は、何を等しいと置くかの違いである。手順で数えるときは、どの手順も一本として等しい。でたらめに打つときは、一手ごとに空いたますが等しい。最善のときは、互いに最も良い手だけが選ばれる——同じ 255168 本の手順の木に、三つの別の重みを置いている。

> **観察 5.2**
>
> でたらめに打つと、短い手順ほど重い。長さ L の手順の確率は、一手ごとに選べるますが $9, 8, 7, \ldots$ と減るので、$9 \times 8 \times \cdots \times (10 - L)$ 分の 1 である。引き分けは必ず九手かかり、先手の勝ちは五手・七手・九手目に決まる——短く終わる先手の勝ちは、手順で数えたときより重く数えられる。だから先手の勝ちが 0.514108 から 0.584921 に上がり、引き分けが下がる。

> **観察 5.3**
>
> 論文164 と並べる。164 は「確率」が四つの住所を持つと示した——本稿の三つは、どれも同じ盤と同じ規則から出るが、何を等しいと置くかで数が変わる。「先手の勝つ確率は」と聞かれたら、まず住所を聞き返す必要がある。

観察 5.4

論文602 と並べる。602 はニムの局面を総当たりで解き、繰り上がりのない足し算で勝ち負けを見分けた——三目並べも木を全部たどれば解けるが、答は「引き分け」の一語で済んでしまう。割合を問うと、木に置く重みが要る。

観察 5.5

言わないこと。定石は扱わず、人の打ち方も論じない——示したのは、同じ木から出る三つの割合と、その違いが重みの置き方から来ることである。

6. 点呼と結び

1. 手順は **255168** 通り（計算 2.1）：先手 **131184**・後手 **77904**・引き分け **46080**。
2. 手順で数えた先手の勝ち **0.514108**（計算 2.1）：半分をわずかに超える。
3. 局面は **5478**、まとめて **765**（計算 2.2）：回転と裏返しの **8** 通り。
4. でたらめに打つと先手の勝ち **737/1260 = 0.584921**（計算 3.1）：乱数でも **0.584060**。
5. 引き分けは **0.180587** から **0.126984** へ（観察 3.2）：同じ木で答が違う。
6. 最善同士なら値は **0**（計算 4.1）：どの初手でも引き分け。
7. 角に打たれたら、引き分けに残る応手は中央だけ（計算 4.2）：**7** か所は負け。
8. 三つの数は何を等しいと置くかの違い（観察 5.1）：本稿の芯。
9. でたらめに打つと短い手順ほど重い（観察 5.2）：早い勝ちが重く数えられる。
10. 確率を問う前に住所を聞き返す（観察 5.3）：論文**164**。

結び：三目並べで先手はどれだけ勝つか。答は、何を等しいと置くかで三つに分かれる——勝負がつくまでの手順 **255168** 通りを等しく数えると先手の勝ちは **0.514108**、二人とも空いたますから等しい確率で打つと **737/1260 = 0.584921**、二人とも最善を尽くすと **0** で必ず引き分けになる。同じ木に、三つの別の重みを置いている——でたらめに打つと、長さ L の手順の確率は一手ごとの選べるますの数の積の逆数で、短く終わる先手の勝ちが重く数えられる。最善の側では、先手が角に打つと後手は中央に打つほかに引き分ける手が無い。既刊との位置——論文**164** の言う確率の住所が、同じ盤の上で数を変える例である。論文**602** のニムと同じく木を全部たどって解けるが、割合を問うと重みが要る。正直に言えば——定石も人の打ち方も扱わず、三つの数え方を並べただけである。

参考文献

1. Berlekamp, E. R., Conway, J. H., & Guy, R. K. (1982). *Winning Ways for your Mathematical Plays*. Academic Press.
2. von Neumann, J., & Morgenstern, O. (1944). *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press.
3. 山岸勇輝 (2026). 『「確率」は四つの住所を持つ』[論文164]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22092815
4. 山岸勇輝 (2026). 『ニムの勝ち負けは、繰り上がりのない足し算で決まる』[論文602]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22805951
5. Zermelo, E. (1913). Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels. *Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians*.

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)