ビュフォンの針が線と交わる回数の期待値は、針を曲げても変わらない

— 間隔 d の平行線に長さ $l \le d$ の針を落とすと、交わる確率は $2l/(\pi d)$ で、$l = d$ なら 0.636620 — 形によらないのは期待値で、確率ではない — [論文613]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

床に間隔 d の平行線を引き、長さ l の針を無造作に落とす。針が線と交わる確率を問うのが、ビュフォンの針の問題である。交わる確率と、交わる回数の期待値を、針の長さと形を変えて数える。新しい定理も法則も主張しない。 第一に、短い針なら、交わる確率は $2l/(\pi d)$ である——$l = d$ で積分すると 0.636620、針 200 万本を乱数で落とすと 0.636781 で、そこから逆算した π は 3.140797 だった（第2節）。 第二に、長い針では、確率と期待値が分かれる——$l = 2d$ で交わる確率は 0.837248、交わる回数の期待値は $2l/(\pi d) = 1.273240$。$l = 5d$ では確率 0.936123 に対し期待値 3.183099 である。一本の針が二本以上の線と交わるからで、期待値は長さに比例して増え続けるが、確率は 1 を超えない（第2節）。 第三に、これが本稿の芯である。交わる回数の期待値は、針を曲げても変わらない——長さ L の折れ線を、ばらばらの形で 10 万本落とすと、回数の期待値は $L = d$ で 0.635280、$L = 3d$ で 1.904310 で、まっすぐな針の $2L/(\pi d)$ にどちらも一致した。直径 d の円（長さ πd）は、どこに落ちてもちょうど 2 回交わる（第3節）。 第四に、分離子は、確率を問うか、期待値を問うかである——折れ線 $L = d$ の交わる確率は 0.395150 で、まっすぐな針の 0.636620 よりずっと小さい。確率は形で変わり、期待値は長さだけで決まる。期待値は針の小さな一片ずつの寄与の和なので、つなぎ方によらない（第3節）。 キーワード：ビュフォンの針、積分幾何、円周率の推定、バルビエの定理、幾何確率。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——針が交わる確率（ビュフォン、1777）、曲線の交わる回数の期待値が長さだけで決まること（バルビエ、1860／ラマリー、1969）、その背後の積分幾何（サンタロ、1976）は、いずれも既知である。積分幾何の一般論は述べるだけである——平行線と針と折れ線の数え上げに限る。π の計算法として勧めない——針 200 万本でも π は 3 桁しか合わない。既刊との関係：論文31 は、次元を持たない π を立体角の π と周期の π に分けた——本稿の π は、針の向きを一周ならしたときの $|\sin\theta|$ の平均 $2/\pi$ から来る。加えたのは、交わる確率の積分と乱数を四つの長さで突き合わせたこと、長い針で確率と期待値が分かれることを数で並べたこと、分離子を「確率か期待値か」に置き、折れ線で期待値が形によらないことを確かめたことである。

1. 記法と問い

設定：床に間隔 d の平行線が無限に引かれている。長さ l の針を、中心の位置も向きも一様に無造作に落とす。針と線の角度を θ とすると、針が線に垂直な向きに占める長さは $l|\sin\theta|$ である。

問い：針が線と交わる確率と、交わる回数の期待値はいくらか。針が長いとき、曲がっているとき、何が変わり、何が変わらないか。

2. まっすぐな針

計算 2.1：$d=1$ として、交わる確率を角度の積分で求め、乱数で針を 200 万本ずつ落として、交わる確率と交わる回数の期待値を数えた。

長さ l	確率（積分）	確率（乱数）	回数の期待値（乱数）	$2l/(\pi d)$
0.5	0.318310	0.318134	0.318134	0.318310
1	**0.636620**	0.636781	0.636781	0.636620
2	0.837248	0.836786	1.272425	1.273240
5	0.936123	0.936259	3.183575	3.183099

$l=1$ の乱数の確率 0.636781 から $\pi = 2l/(dP)$ を逆算すると 3.140797 だった。

> **観察 2.2**
>
> 短い針では、確率と期待値が同じである。$l \le d$ の針は二本の線とは交われないので、交わる回数は 0 か 1 で、期待値は確率に等しい——その値 $2l/(\pi d)$ の $2/\pi$ は、針の向きをならしたときの $|\sin\theta|$ の平均である。

> **観察 2.3**
>
> 長い針では、確率と期待値が分かれる。$l=2d$ で確率 0.837248 に対し期待値 1.273240、$l=5d$ で 0.936123 に対し 3.183099 である——期待値は長さに比例して増え続けるが、確率は 1 に近づくだけである。一本の針が何本もの線と交わるので、「交わるか」と「何回交わるか」が別の問いになる。

3. 曲げた針

計算 3.1：長さ L を 30 の線分に分け、隣り合う線分の向きをばらばらに曲げた折れ線を、位置も向きも無造作に 10 万本落とした。

長さ L	回数の期待値（乱数）	$2L/(\pi d)$	交わる確率（乱数）
1	0.635280	0.636620	0.395150
3	1.904310	1.909859	0.917120

直径 d の円（長さ πd）は、どこに落ちてもちょうど 2 回交わり、$2L/(\pi d) = 2$ に一致する。

> **観察 3.2**
>
> これが本稿の芯である。交わる回数の期待値は、針を曲げても変わらない。曲げた針を小さな一片ずつに分けると、各片が交わる回数の期待値はその長さに比例し、全体の期待値はその和になる——和は片のつなぎ方によらないので、まっすぐでも、折れていても、円でも、長さ L なら $2L/(\pi d)$ である。

> **観察 3.3**
>
> 分離子は、確率を問うか、期待値を問うかである。長さ d の折れ線の交わる確率は 0.395150 で、まっすぐな針の 0.636620 よりずっと小さい。曲がった針は線の間に収まりやすく、交わるときは二度交わることがある——確率は形で変わり、期待値は長さだけで決まる。

> **観察 3.4**
>
> 論文31 と並べる。31 は、次元を持たない π を、立体角から来るものと周期から来るものに分けた——ビュフォンの針の π は、針の向きを半回転にわたってならしたことから来る。$|\sin\theta|$ の平均が $2/\pi$ で、そこに円周の π が入る。

> **観察 3.5**
>
> 言わないこと。積分幾何の一般論には立ち入らない。π の計算法としては勧めない。針 **200** 万本で **3** 桁しか合わない——示したのは、確率と期待値が長い針で分かれること、そして期待値が形によらないことである。

4. 点呼と結び

1. $l = d$ の交わる確率 **0.636620**（計算 2.1）：$2/\pi$。
2. 乱数で **0.636781**、π は **3.140797**（計算 2.1）：二つの道筋。
3. 短い針では確率＝期待値（観察 2.2）：二本とは交われない。
4. $l = 2d$ で確率 **0.837248**、期待値 **1.273240**（計算 2.1）：分かれる。
5. $l = 5d$ で確率 **0.936123**、期待値 **3.183099**（計算 2.1）：期待値は長さに比例。
6. 折れ線 $L = d$ の期待値 **0.635280**（計算 3.1）：まっすぐと同じ。
7. 折れ線 $L = 3d$ の期待値 **1.904310**（計算 3.1）：同じく $2L/(\pi d)$。
8. 円はいつも **2** 回（計算 3.1）：長さ πd。
9. 期待値は形によらない（観察 3.2）：本稿の芯。
10. 折れ線の交わる確率は **0.395150**（観察 3.3）：分離子は確率か期待値か。

結び：間隔 d の平行線に長さ l の針を落とす。短い針なら、交わる確率は $2l/(\pi d)$ で、交わる回数の期待値と同じである——$l = d$ で **0.636620**、針 **200** 万本で **0.636781** だった。長い針では確率と期待値が分かれ、$l = 5d$ で確率 **0.936123** に対し期待値 **3.183099** になる。交わる回数の期待値は、針を曲げても変わらない——ばらばらに折れた長さ L の線を落としても、期待値は $2L/(\pi d)$ に一致し、円はどこに落ちても **2** 回交わった。期待値は小さな一片ずつの寄与の和で、つなぎ方によらない。分離子は、確率を問うか、期待値を問うかである——同じ長さでも、折れ線の交わる確率は **0.395150** で、まっすぐな針の **0.636620** とは違う。既刊との位置——論文 **31** が分けた π の出どころに、向きをならしたときの $2/\pi$ を並べる。正直に言えば——積分幾何の一般論には入らず、平行線と針と折れ線を数えただけである。

参考文献

1. Barbier, É. (1860). Note sur le problème de l’aiguille et le jeu du joint couvert. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*.
2. Buffon, G.-L. L. de (1777). *Essai d’arithmétique morale*.
3. Ramaley, J. F. (1969). Buffon’s noodle problem. *The American Mathematical Monthly*.

4. Santaló, L. A. (1976). *Integral Geometry and Geometric Probability*. Addison-Wesley.

5. 山岸勇輝 (2026). 『次元を持たない π』[論文31]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22090430

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)