安定な組み合わせでは、申し込む側が得をする

— 6 人ずつの好み 300 組で全部の組み合わせを調べると、申し込む側は全員が安定な中で最良の相手、受ける側は全員が最悪の相手になった — 100 人ずつでは、相手の順位の平均が申し込む側 5.081700 番目、受ける側 19.731150 番目 — [論文615]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

n 人ずつの二つの側があり、各人が相手側の全員に好みの順をつける。どの二人も「今の相手より互いを好む」ことが無い組み合わせを、安定な組み合わせという。一方の側が好きな順に申し込み、受ける側がそのつど良い方を残す方法（ゲール＝シャプレーの方法）で組み合わせを作り、それを全部の組み合わせと比べる。新しい定理も法則も主張しない。 第一に、申し込む方法は、いつも安定な組み合わせを作る——6 人ずつの好みを乱数で 300 組作り、全部の組み合わせ 720 通りから安定なものを探すと、申し込む方法の結果は 300 組すべてで安定だった（第2節）。 第二に、これが本稿の芯である。申し込む側は全員が最良、受ける側は全員が最悪の相手になる——300 組すべてで、申し込む側の一人一人が、安定な組み合わせの中で得られる最良の相手を得、受ける側の一人一人が、安定な組み合わせの中で最悪の相手になった（第2節）。 第三に、安定な組み合わせは一つとは限らない——6 人ずつでは、安定な組み合わせの数は平均 1.856667 個、最大 6 個で、一つだけだったのは 0.426667 である。一つしか無ければどちらが申し込んでも同じだが、複数あると、申し込む側がその両端の自分に良い端を取る（第2節）。 第四に、人数が多いと、差は大きく開く——100 人ずつの好み 200 組で、相手が自分の好みの何番目かを平均すると、申し込む側は 5.081700 番目、受ける側は 19.731150 番目で、3.882785 倍の開きがあった（第3節）。 第五に、分離子は、どちらが申し込むかである——好みも人も同じで、申し込む側を入れ替えるだけで、どちらの側が最良の端を取るかが入れ替わる。どちらも「安定」であることに変わりはない（第3節）。 キーワード：安定結婚問題、ゲール＝シャプレーのアルゴリズム、マッチング、申し込む側の有利、メカニズムデザイン。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——申し込む方法がいつも安定な組み合わせを作り、申し込む側に最良、受ける側に最悪になること（ゲールとシャプレー、1962）、安定な組み合わせの構造（クヌース、1976／ロスとソトマイヨール、1990）、相手の順位の平均が申し込む側で約 $\ln n$、受ける側で約 $n/\ln n$ になること（ピッテル、1989）は、いずれも既知である。制度を論じない——研修医の配属や学校選択の仕組みには立ち入らない。好みは乱数である——実際の好みの偏りや、嘘の好みを申告する場合は扱わない。既刊との関係：論文161 は、「不動点」の定理が何を要求し何を与えるかで別物であることを示した——安定な組み合わせでは、在ることを示す手続きが、どの組み合わせを作るかまで決め、しかもそれが一方の側に偏る。加えたのは、6 人ずつで全部の組み合わせを調べ、申し込む方法の結果と突き合わせたこと、安定な組み合わせの数の分布と、100 人ずつでの順位の平均を出したこと、分離子を「どちらが申し込むか」に置いたことである。

1. 記法と問い

設定：申し込む側 n 人と受ける側 n 人がいて、各人が相手側の n 人に好みの順をつける。一対一の組み合わせのうち、「二人とも今の相手より互いを好む」二人が一組もいないものを安定という。

申し込む方法：相手のいない申し込む側の人は、まだ断られていない中で一番好きな相手に申し込む。受ける側は、それまでの申し込みの中で一番好きな人だけを残し、ほかは断る。断られた人はまた次に好きな相手に申し込む。誰も断られなくなったら終わる。

問い：申し込む方法の結果は安定か。安定な組み合わせの中で、それはどこにあるか。どちらの側に得か。

2. 全部の組み合わせと比べる

計算 2.1：6 人ずつの好みを乱数で 300 組作り、組ごとに全部の組み合わせ $6! = 720$ 通りを調べて安定なものをすべて求めた（申し込む方法とは独立な道筋）。

確かめたこと	300 組のうち
申し込む方法の結果が安定	300
申し込む側の全員が、安定な中で最良の相手	300
受ける側の全員が、安定な中で最悪の相手	300

計算 2.2：安定な組み合わせの数は、平均 1.856667 個、最小 1 個、最大 6 個で、一つだけだった組は 0.426667 だった。

観察 2.3

これが本稿の芯である。申し込む側は全員が最良、受ける側は全員が最悪の相手になる。安定な組み合わせが複数あるとき、それらは申し込む側から見て良い端と悪い端を持つ。申し込む方法は、申し込む側の良い端を、全員について同時に取る——同じ組み合わせは、受ける側から見れば全員にとって悪い端である。一方の最良が、他方の最悪になっている。

観察 2.4

安定な組み合わせが一つなら、差は生まれない。300 組のうち 0.426667 は安定な組み合わせが一つだけで、どちらが申し込んでも同じ結果になる——残りの組では、安定な組み合わせが二つ以上あり、そのどれを取るかを申し込む側が決めている。

3. 人数を増やす

計算 3.1：100 人ずつの好みを乱数で 200 組作り、申し込む方法で組み合わせ、相手が自分の好みの何番目かを平均した。

側	相手の順位の平均	漸近の目安
申し込む側	**5.081700** 番目	$\ln 100 = 4.605170$
受ける側	**19.731150** 番目	$100/\ln 100 = 21.714724$

受ける側と申し込む側の比は **3.882785** だった。調和数 $H_{100} = 5.187378$ を使うと、目安は 5.187378 と $100/H_{100} = 19.277564$ で、どちらも実測に近い。

観察 3.2

人数が多いと、申し込む側の得は大きく開く。申し込む側は 100 人中およそ 5 番目に好きな相手と組み、受ける側はおよそ 20 番目の相手と組む——どちらの組み合わせも安定で、誰にも「駆け落ち」する理由は無い。それでも、得の分け方は申し込む側に大きく偏っている。

観察 3.3

分離子は、どちらが申し込むかである。好みも人も同じまま、申し込む側と受ける側を入れ替えると、今度は元の受ける側が最良の端を取る——「安定」は一つの組み合わせを指す言葉ではなく、両端を持つ集まりを指す。手続きを決めることは、その端を一つ選ぶことである。

観察 3.4

論文161 と並べる。161 は、「不動点」の定理が、何を要求し何を与えるかでそれぞれ別物であることを示した——在ることを言うだけの定理とは違い、申し込む方法は安定な組み合わせを作ってみせ、しかもその中の特定の一つ、申し込む側に最も良いものを返す。

観察 3.5

言わないこと。研修医の配属や学校選択の制度には立ち入らない。好みは乱数で、嘘の好みを申告する場合は扱わない——示したのは、6 人ずつでの全部の組み合わせとの突き合わせ、100 人ずつでの順位の平均、そして申し込む側を入れ替えると得が入れ替わることである。

4. 点呼と結び

1. 申し込む方法の結果は 300 組すべてで安定（計算 2.1）：全部の組み合わせと突き合わせ。
2. 申し込む側は全員が最良（計算 2.1）：300 組すべて。
3. 受ける側は全員が最悪（計算 2.1）：300 組すべて。
4. 一方の最良が他方の最悪（観察 2.3）：本稿の芯。
5. 安定な組み合わせは平均 1.856667 個（計算 2.2）：最大 6 個。
6. 一つだけの組は 0.426667（観察 2.4）：そこでは差が無い。
7. 100 人ずつで申し込む側 5.081700 番目（計算 3.1）：$\ln n$ に近い。
8. 受ける側 19.731150 番目（計算 3.1）：$n/\ln n$ に近い。
9. 比 3.882785（計算 3.1）：人数が多いと開く。
10. 分離子はどちらが申し込むか（観察 3.3）：入れ替えれば得も入れ替わる。

結び：二つの側が相手に好みの順をつけるとき、一方が順に申し込み、受ける側が良い方を残す方法は、安定な組み合わせを作る。そして、申し込む側が得をする——6 人ずつの好み 300 組で全部の組み合わせ 720 通り

と突き合わせると、申し込む方法の結果はすべて安定で、申し込む側は全員が安定な中で最良の相手、受ける側は全員が最悪の相手になった。人数が多いと差は大きく開く——100 人ずつでは、相手の順位の平均が申し込む側 5.081700 番目、受ける側 19.731150 番目で、3.882785 倍の開きがあった。分離子は、どちらが申し込むかである——安定な組み合わせは両端を持つ集まりで、手続きを決めることは、その端を一つ選ぶことである。既刊との位置——論文161 が分けた「在ることを言う定理」とは違い、ここでは手続きが作るものまで決め、それが一方に偏る。正直に言えば——好みは乱数で、制度にも嘘の申告にも立ち入っていない。

参考文献

1. Gale, D., & Shapley, L. S. (1962). College admissions and the stability of marriage. *The American Mathematical Monthly*.
2. Knuth, D. E. (1976). *Mariages stables et leurs relations avec d'autres problèmes combinatoires*. Les Presses de l'Université de Montréal.
3. Pittel, B. (1989). The average number of stable matchings. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*.
4. Roth, A. E., & Sotomayor, M. A. O. (1990). *Two-Sided Matching: A Study in Game-Theoretic Modeling and Analysis*. Cambridge University Press.
5. 山岸勇輝 (2026). 『「不動点」は一つの定理ではない』[論文161]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22092530

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)