凍る時間は、薄いものでは厚さに比例し、厚いものでは厚さの二乗に近づく

— 厚さを 2 倍にすると、熱伝達率 20・厚さ 1 cm では 2.044444 倍、熱伝達率 200・厚さ 20 cm では 3.639344 倍 — どちらが効くかはビオ数で決まる — [論文618]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

水分の多いものを冷気で凍らせるとき、凍り終わるまでの時間は、表面から冷気へ熱が移る速さと、凍った層の中を熱が伝わる速さの両方で決まる（プランクの式）。その時間が厚さでどう変わるかを、式と数値計算の二つの道筋で出す。新しい定理も法則も主張しない。 第一に、凍る時間は、厚さに比例する項と厚さの二乗に比例する項の和である——冷気 −30 ℃・熱伝達率 20 W/(m²・K) で両面から冷やす板は、厚さ 1 cm で 0.790720 時間、5 cm で 4.305029 時間、20 cm で 22.491582 時間で凍る。内部の項は表面の項のビオ数の 4 分の 1 倍である（第2節）。 第二に、これが本稿の芯である。厚さを 2 倍にしたときの倍率は、ビオ数で 2 から 4 へ移る——熱伝達率 20・厚さ 1 cm（ビオ数 0.090909）では 2.044444 倍でほぼ厚さに比例し、熱伝達率 200・厚さ 20 cm（ビオ数 18.181818）では 3.639344 倍で二乗に近づく。薄いものは表面が、厚いものは内部が狭い通り道になる（第3節）。 第三に、数値計算は、プランクの式より少し長い——エンタルピー法で板を凍らせると、プランクの式より 1.003827 倍（ビオ数 0.090909）から 1.058104 倍（ビオ数 18.181818）長かった。格子を倍にしても 0.04 パーセントしか動かなかった（第4節）。 第四に、その差は、凍った部分を冷やす熱から来ていた——プランクの式は凍った層を 0 ℃ より冷やす熱を入れていない。数値計算で凍った部分の比熱を十分の一にすると、差は 1.015892 倍から 1.001589 倍に、1.058104 倍から 1.005827 倍に、ほぼ十分の一に縮んだ（第4節）。 第五に、形も効く——同じ厚さ（直径）5 cm なら、板 4.305029 時間、円柱 2.152515 時間、球 1.435010 時間で、球は板の三分の一の時間で凍る（第5節）。 キーワード：凍結時間、プランクの式、ビオ数、ステファン問題、食品の冷凍。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——凍る時間の式（プランク、1913）、動く凍結面の問題（ステファン、1891）、熱伝導の解法（カースローとイェーガーの教科書ほか）は、いずれも既知である。食品の品質を扱わない——氷の結晶の大きさや、凍らせ方と味の関係には立ち入らない。材料の値は代表値である——密度 1000 kg/m³、潜熱 334 kJ/kg、凍った部分の熱伝導率 2.2 W/(m・K)、比熱 2.1 kJ/(kg・K)、凍る温度 0 ℃ と置いた。初めから凍る温度にある場合だけを見る——凍る前に冷やす時間は入れない。既刊との関係：論文 465 は、冷めやすさを決めるのが比熱ではなく表面積と体積の比であり、小さくすれば冷却の時定数が大きさに比例して縮むことを示した——本稿の薄いものが厚さに比例するのはその側で、厚くなると内部の伝わりが効いて二乗に移る。加えたのは、厚さを倍にしたときの倍率をビオ数ごとに並べたこと、プランクの式をエンタルピー法の数値計算と突き合わせ、差の大きさと原因を数で確かめたこと、分離子をビオ数に置いたことである。

1. 記法と問い

設定：厚さ a の板を、温度 T_a の冷気で両面から冷やす。材料は初めから凍る温度 T_f にあり、密度 ρ、凍るときに出す潜熱 L、凍った部分の熱伝導率 k、表面の熱伝達率 h とする。プランクの式は、凍り終わる時間を

$$t = \frac{\rho L}{T_f - T_a}\left(\frac{P\,a}{h} + \frac{R\,a^2}{k}\right)$$

とする。板なら $P = 1/2$、$R = 1/8$ である。ビオ数を $\mathrm{Bi} = ha/k$ と書くと、第二の項は第一の項の $\mathrm{Bi}/4$ 倍になる。

問い：厚さを変えると凍る時間はどう変わるか。プランクの式はどれだけ正しいか。何が分けるか。

2. 凍る時間

計算 2.1：冷気 -30 ℃、材料の値を代表値に置いて、プランクの式で凍る時間を求めた。

熱伝達率	厚さ	ビオ数	プランク
20 W/(m^2・K)	**0.01** m	**0.090909**	**0.790720** 時間
20	**0.05** m	**0.454545**	**4.305029** 時間
20	**0.20** m	**1.818182**	**22.491582** 時間
200	**0.01** m	**0.909091**	**0.094886** 時間
200	**0.05** m	**4.545455**	**0.825863** 時間
200	**0.20** m	**18.181818**	**8.574916** 時間

3. 厚さを 2 倍にする

計算 3.1：厚さを **2** 倍にしたとき凍る時間が何倍になるかを、プランクの式と数値計算（第4節）で求めた。

熱伝達率	厚さ	プランク	数値計算
20	**0.01** → **0.02** m	**2.044444** 倍	**2.051491** 倍
20	**0.05** → **0.10** m	**2.204082** 倍	**2.226169** 倍
20	**0.20** → **0.40** m	**2.625000** 倍	**2.651287** 倍
200	**0.01** → **0.02** m	**2.370370** 倍	**2.397872** 倍
200	**0.05** → **0.10** m	**3.063830** 倍	**3.078759** 倍
200	**0.20** → **0.40** m	**3.639344** 倍	**3.642009** 倍

> **観察 3.2**
>
> これが本稿の芯である。厚さを倍にしたときの倍率は、ビオ数で **2** から **4** へ移る。ビオ数が小さいと、熱は内部をすぐ伝わり、表面から冷気へ出る所で詰まる。凍る時間は表面の項で決まり、厚さに比例する——ビオ数が大きいと、表面はすぐ冷えるが、凍った層の中を熱が伝わる所で詰まる。凍る時間は内部の項で決まり、厚さの二乗に近づく。

4. 数値計算

計算 4.1：プランクの式とは独立に、板の半分を 16 区間に分け、エンタルピー（潜熱と、凍った部分を冷やす熱の両方を含む）を追う数値計算で、すべての区間が凍り終わる時間を求めた。

熱伝達率・厚さ	プランク	数値計算	比
20・0.01 m	0.790720 時間	0.793746 時間	1.003827
20・0.05 m	4.305029 時間	4.373446 時間	1.015892
20・0.20 m	22.491582 時間	23.345762 時間	1.037978
200・0.01 m	0.094886 時間	0.097360 時間	1.026073
200・0.05 m	0.825863 時間	0.867957 時間	1.050970
200・0.20 m	8.574916 時間	9.073153 時間	**1.058104**

区間を 32 に倍にすると（熱伝達率 20・厚さ 0.05 m）4.375324 時間で、16 区間との比は 1.000429 だった。

計算 4.2：数値計算で凍った部分の比熱を十分の一（210 J/(kg・K)）にすると、プランクとの比は、熱伝達率 20・厚さ 0.05 m で 1.015892 から 1.001589 に、熱伝達率 200・厚さ 0.20 m で 1.058104 から 1.005827 に縮んだ。

> **観察 4.3**
>
> プランクの式より長いのは、凍った部分を冷やす熱をプランクが入れていないからである。プランクの式は、凍った層が 0 ℃ から冷気へ向かってまっすぐ温度が下がると置き、その層を冷やす熱を数えない——比熱を十分の一にすると差がほぼ十分の一に縮んだので、差はその熱から来ていた。ビオ数が大きいほど凍った層が冷気近くまで冷え、差が開く。

5. 分離子

> **観察 5.1**
>
> 分離子は、熱の通り道のどこが狭いか（ビオ数）である。表面が狭ければ厚さに比例し、内部が狭ければ厚さの二乗に近づく——同じ材料・同じ冷気でも、熱伝達率を 20 から 200 に上げると、同じ厚さ 20 cm でビオ数が 1.818182 から 18.181818 に移り、倍率が 2.625000 から 3.639344 に変わる。

計算 5.2：形の係数を変えて、同じ厚さ（直径）0.05 m・熱伝達率 20 で比べると、板 4.305029 時間、円柱 2.152515 時間、球 1.435010 時間だった。球は板の三分の一の時間で凍る。

> **観察 5.3**
>
> 論文465 と並べる。465 は、冷めやすさを決めるのは比熱ではなく表面積と体積の比で、小さくすれば冷却の時定数が大きさに比例して縮むことを示した——それはビオ数が小さい側の話で、本稿の薄いものが厚さに比例するのと同じ側である。厚くなってビオ数が大きくなると、凍る時間は厚さの二乗に移り、小さくする効き目はさらに大きくなる。

> **観察 5.4**
>
> 言わないこと。食品の品質は扱わない。材料の値は代表値で、凍る前に冷やす時間は入れていない——示したのは、厚さを倍にしたときの倍率がビオ数で 2 から 4 へ移ること、プランクの式と数値計算の差の大きさと、その原因である。

6. 点呼と結び

1. 厚さ 1 cm は 0.790720 時間（計算 2.1）：熱伝達率 20・冷気 −30 °C。
2. 内部の項は表面の項の Bi/4 倍（記法）：プランクの式の二つの項。
3. 倍の厚さで 2.044444 倍（ビオ数 0.090909）（計算 3.1）：ほぼ比例。
4. 倍の厚さで 3.639344 倍（ビオ数 18.181818）（計算 3.1）：二乗に近づく。
5. 倍率はビオ数で 2 から 4 へ（観察 3.2）：本稿の芯。
6. 数値計算はプランクより 1.003827 から 1.058104 倍長い（計算 4.1）：二つの道筋。
7. 格子を倍にしても 0.04 パーセント（計算 4.1）：計算は収まっている。

8. 比熱を十分の一にすると差も十分の一（計算 4.2）：差の原因を確かめた。
9. 分離子は熱の通り道のどこが狭いか（観察 5.1）：ビオ数。
10. 球は板の三分の一の時間（計算 5.2）：形の係数。

結び：冷気でものを凍らせる時間は、表面から熱を奪う項と、凍った層の中を熱が伝わる項の和である。薄いものでは厚さに比例し、厚いものでは厚さの二乗に近づく——厚さを 2 倍にすると、ビオ数 0.090909 では 2.044444 倍、ビオ数 18.181818 では 3.639344 倍になる。エンタルピー法の数値計算は、プランクの式より 0.4 から 5.8 パーセント長かった——凍った部分の比熱を十分の一にすると差もほぼ十分の一に縮み、差がプランクの入れていない、凍った層を冷やす熱から来ていることを確かめた。分離子は、熱の通り道のどこが狭いか、ビオ数である——表面が狭ければ比例、内部が狭ければ二乗で、同じ厚さなら球は板の三分の一の時間で凍る。既刊との位置——論文465 の「小さくすれば大きさに比例して速く冷める」はビオ数が小さい側で、厚い側では二乗に移る。正直に言えば——材料の値は代表値で、食品の品質も凍る前の冷却も入れていない。

参考文献

1. Carslaw, H. S., & Jaeger, J. C. (1959). *Conduction of Heat in Solids* (2nd ed.). Oxford University Press.
2. Plank, R. (1913). Die Gefrierdauer von Eisblöcken. *Zeitschrift für die gesamte Kälte-Industrie*.
3. Stefan, J. (1891). Über die Theorie der Eisbildung, insbesondere über die Eisbildung im Polarmeere. *Annalen der Physik und Chemie*.
4. 山岸勇輝 (2026). 『材質を変えるより、小さくするほうが四十倍効く』[論文465]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22733260

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)