

コラッツの操作は平均して縮むが、3を5に替えると平均して伸びる

— 奇数なら3倍して1を足し、偶数なら半分にする — 3を5に替えると $\sqrt{5/4} = 1.118034$ で平均して伸び、1から10000のうち9274個が 10^{12} を超えた — [論文621]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年9月

YOI: <https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/621>

— From thinking to syncing. —

要旨

正の整数 n が奇数なら $3n+1$ に、偶数なら $n/2$ に置き換える操作をくり返すと、どの数から始めてもいつか1に着くと予想されている（コラッツの予想）。その振る舞いを数で確かめ、なぜ縮むのか、何を替えると縮まなくなるのかを見る。新しい定理も法則も主張しない。予想は証明しない。第一に、 10^6 までのどの数も1に着く。2から 10^6 まで全部を回すと、どれもいつかは出発点より小さくなり、1に着いた。手数の平均は **131.434555**、最長は **837799** の **524** 手である。27は111手かかり、途中で **9232** まで上がる（第2節）。第二に、平均すると、一步ごとに縮む。奇数の一步を $(3n+1)/2$ とまとめると、一步は半分の確率で約1.5倍、半分の確率で0.5倍になり、倍率の幾何平均は $\sqrt{3/4} = 0.866025$ である。大きな数から2000本を40歩ずつ回すと、実測は **0.864706** だった（第3節）。第三に、これが本稿の芯である。分離子は、掛ける数が4より小さいかどうかである。3を5に替えると倍率の幾何平均は $\sqrt{5/4} = 1.118034$ になり、平均して伸びる。1から10000のうち9274個が 10^{12} を超え、輪に入ったのは726個だけだった（第4節）。第四に、平均して縮んでも、1に着くとは限らない。 $3n+1$ を $3n-1$ に替えても倍率の幾何平均は同じ $\sqrt{3/4}$ で平均して縮むが、1から10000は1を含む輪（3244個）、5を含む輪（3213個）、17を含む長さ18の輪（3543個）の三つに分かれた。縮むことは、どの輪に落ちるかまでは決めない（第4節）。キーワード：コラッツ予想、 $3n+1$ 問題、幾何平均、停止時間、力学系。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない。 $3n+1$ の問題とその一般化（ラガリアス、1985）、停止までの手数の性質（テラス、1976）、確率による見立ては、いずれも既知である（ラガリアス編の本が集めている）。予想を証明しない。 10^6 まで確かめるのは証明ではない。「平均して縮む」は奇数と偶数が半々に出るとした見立てで、個々の数について何も保証しない。一般の $an+b$ の理論は扱わない。 $3n+1 \cdot 3n-1 \cdot 5n+1$ の三つだけを比べる。既刊との関係：論文195は、「安定」が何を揺らすかで六つの別の言葉に分かれることを示した。本稿の $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ の輪は、平均して縮むことで引き込まれる輪で、同じ縮み方でも $3n-1$ では引き込む輪が三つある。加えたのは、 10^6 までの手数を表で数え、一つずつ回した値と見本で突き合わせたこと、倍率の幾何平均を式と乱数の二つで出したこと、分離子を「掛ける数と4」に置き、 $5n+1$ と $3n-1$ で確かめたことである。

1. 記法と問い

設定：正の整数 n に、奇数なら $an+1$ 、偶数なら $n/2$ を対応させる操作を考える（ $a=3$ がコラッツの操作）。1 に着くまでの回数を手数と呼ぶ。

問い：どの数も 1 に着くか。なぜ縮むのか。 a を替えると何が起きるか。

2. 10^6 まで回す

計算 2.1：2 から 10^6 までの各数を、出発点より小さい数に落ちるまで回し、そこから先の手数は表から足した。どの数もいつかは出発点より小さくなったので、全部が 1 に着いた。

量	値
手数の平均（2～ 10^6 ）	131.434555
最長	837799 の 524 手
27 の手数・途中の最大	111 手・9232

表の値は、無作為に選んだ 2000 個について、一つずつ最後まで回した手数と一致した。

観察 2.2

小さな数でも、長く遠回りする。27 は 9232 まで上がってから 111 手で 1 に戻る。上がり下がりは激しいが、 10^6 までの一つも 1 を避けなかった。

3. 平均の縮み方

観察 3.1

奇数の一步と、そのあと必ず来る半分の一步をまとめる。奇数 n は $(3n+1)/2$ に、偶数 n は $n/2$ に移ると見ると、一步の倍率はおよそ 1.5 か 0.5 である。奇数と偶数が半々に出るなら、倍率の幾何平均は

$$\sqrt{\frac{3}{2} \times \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = 0.866025$$

で、平均して縮む。

計算 3.2： 10^{20} から 10^{21} の数を実作為に 2000 個選り、40 歩ずつ回して一步の倍率の幾何平均を測ると **0.864706** だった。

観察 3.3

検算で、一度偏った測り方をした。最初は出発点を必ず奇数にしたので、最初の一步が必ず伸びる向きになり、実測は **0.878061** だった。最初の一步だけ 1.5 倍に固定した見立ての予測 **0.878000** と一致したので、偏りの出どころを確かめてから、出発点を無作為に直した。

4. 分離子

計算 4.1： a を替えて、1 から 10000 の行き先を数えた (10^{12} を超えたら「飛び出した」とした)。

操作	倍率の幾何平均	1~10000 の行き先
$3n+1$	$\sqrt{3/4} = 0.866025$	すべて 1 を含む輪
$3n-1$	$\sqrt{3/4} = 0.866025$	1 の輪 3244 · 5 の輪 3213 · 17 の輪 3543
$5n+1$	$\sqrt{5/4} = 1.118034$	飛び出した 9274 · 輪 726

$5n+1$ で輪に入った 726 個は、13 を含む輪 (383 個)、1 を含む長さ 7 の輪 (256 個)、17 を含む輪 (87 個) だった。

観察 4.2

これが本稿の芯である。分離子は、掛ける数 a が 4 より小さいかどうかである。倍率の幾何平均は $\sqrt{a/4}$ で、 $a < 4$ なら平均して縮み、 $a > 4$ なら平均して伸びる。 $a = 5$ では 1 から 10000 の九割以上が 10^{12} を超えた。3 と 5 の違いは、4 の手前か向こうかである。

観察 4.3

平均して縮むことは、1 に着くことを保証しない。 $3n - 1$ は $3n + 1$ と同じ縮み方をするのに、1 から 10000 が三つの輪に分かれた。縮むことは数がどこまでも大きくならない見立てを与えるだけで、落ちる先の輪がいくつあるかは別の問いである。 $3n + 1$ で 1 を含む輪しか見つからないことは、縮み方からは出てこない。

観察 4.4

論文195 と並べる。195 は「安定」が何を揺らすかで六つに分かれると示した。コラッツの輪は、平均の縮み方という意味で引き込む輪である。だが同じ縮み方をする $3n - 1$ では、引き込む輪が三つある。引き込むことと、ただ一つであることは別である。

観察 4.5

言わないこと。予想は証明しない。 10^6 まで確かめても、その先は分からない。 $5n + 1$ の数が本当に限りなく大きくなるかも証明しない。示したのは、 10^6 までの数え上げ、平均の縮み方の式と実測、そして掛ける数を替えたときの違いである。

5. 点呼と結び

1. 10^6 までのどの数も 1 に着く (計算 2.1) : 表と一つずつの回しで一致。
2. 手数の平均 **131.434555**、最長 **837799** の **524** 手 (計算 2.1) : 知られた値と一致。
3. **27** は **9232** まで上がって **111** 手 (観察 2.2) : 激しく遠回りする。
4. 倍率の幾何平均 $\sqrt{3/4} = \mathbf{0.866025}$ (観察 3.1) : 平均して縮む。
5. 実測 **0.864706** (計算 3.2) : 二つの道筋。

6. 出発点を奇数に固定すると **0.878** に偏る（観察 3.3）：予測 **0.878000** で確かめた。

7. $5n + 1$ は $\sqrt{5/4} = \mathbf{1.118034}$ （計算 4.1）：**9274** 個が飛び出す。

8. 分離子は掛ける数と **4**（観察 4.2）：本稿の芯。

9. $3n - 1$ は同じ縮み方で三つの輪（観察 4.3）：縮むことは行き先を決めない。

10. 引き込むこととただ一つであることは別（観察 4.4）：論文**195**。

結び：奇数なら **3** 倍して **1** を足し、偶数なら半分にする操作は、 10^6 までのどの数から始めても **1** に着いた。平均すると、一歩ごとに縮むからである。奇数の一歩をまとめると一歩の倍率は **1.5** か **0.5** で、幾何平均は $\sqrt{3/4} = \mathbf{0.866025}$ 、乱数で測ると **0.864706** だった。分離子は、掛ける数が **4** より小さいかどうかである。**3** を **5** に替えると $\sqrt{5/4} = \mathbf{1.118034}$ で平均して伸び、**1** から **10000** のうち **9274** 個が 10^{12} を超えた。そして、縮むことは **1** に着くことを保証しない。 $3n - 1$ は同じ縮み方で、三つの輪に分かれた。既刊との位置：論文**195** の「安定」の一つの意味で引き込む輪だが、引き込む輪がただ一つかは別の問いである。正直に言えば、予想は証明しておらず、 10^6 までを数え、平均の見立てを測っただけである。

参考文献

-
1. Lagarias, J. C. (1985). The $3x + 1$ problem and its generalizations. *The American Mathematical Monthly*.
 2. Lagarias, J. C. (Ed.) (2010). *The Ultimate Challenge: The $3x + 1$ Problem*. American Mathematical Society.
 3. Terras, R. (1976). A stopping time problem on the positive integers. *Acta Arithmetica*.
 4. 山岸勇輝 (2026). 『「安定」は六つの別の言葉であり、分けているのは何を揺らすかである』[論文195]. YOI:
<https://www.yamagishiyuuki.com/yoi/195> ・ DOI: 10.5281/zenodo.22107170
-

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)