クイーンを取り合わずに並べる置き方は、盤を大きくしても増えるとは限らない

— $n \times n$ の盤に、縦・横・斜めのどれでも取り合わない n 個のクイーンを置く — 12×12 では 14200 通り — [論文624]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— *From thinking to syncing.* —

要旨

チェスのクイーンは、縦・横・斜めにいくらでも動ける。$n \times n$ の盤に n 個のクイーンを、どの二つも取り合わないように置く置き方を数える（n クイーンの問題）。新しい定理も法則も主張しない。 第一に、8×8 の置き方は 92 通り、まとめると 12 通りである——盤の回転と裏返し（8 通り）で重なる置き方を一つとまとめると、92 通りは 12 通りになる（第2節）。 第二に、小さい盤には置き方が無い——2×2 と 3×3 では、どう置いても取り合う。4×4 で初めて 2 通り（まとめると 1 通り）置ける（第2節）。 第三に、これが本稿の芯である。盤を大きくしても、置き方が増えるとは限らない——5×5 は 10 通りなのに、6×6 は 4 通り（まとめると 1 通り）に減る。7×7 で 40 通りに戻り、12×12 では 14200 通りまで増える（第2節）。 第四に、二つの探し方が一致した——縦・横・二方向の斜めの使用を桁で覚えて一行ずつ置く探し方と、列の並べ方 $n!$ 通りを全部試す探し方で、$n = 4$ から 8 の数が一致した（第3節）。 キーワード：エイト・クイーン、n クイーン問題、バックトラック、盤の対称性、組合せ探索。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——8 クイーンの 92 通りと、各 n の置き方の数は、いずれも既知である（ベルとスティーヴンズの 2009 年の概説、リヴィンらの 1994 年の論文ほか）。一般の n の漸近式を扱わない——$n = 1$ から 12 を数え、$n \leq 10$ で対称をまとめるだけである。置き方を作る速い方法を扱わない——一つ置き方を作るだけなら、全部を数えなくてもよい方法が知られている。既刊との関係：論文604は、6 次のラテン方陣に直交する相手が一つも無いことを示した——ラテン方陣もクイーンの置き方も「行と列に一つずつ」を満たす並べ方で、クイーンにはさらに斜めの条件が足される。ここでも 6 で数が落ち込む。加えたのは、$n = 1$ から 12 の数と、$n \leq 10$ で対称をまとめた数を並べたこと、二つの探し方を $n = 4$ から 8 で突き合わせたこと、分離子を盤の大きさに置き、増え方が単調でないことを示したことである。

1. 記法と問い

設定：$n \times n$ の盤に n 個のクイーンを置き、どの二つも同じ行・同じ列・同じ斜めの線に乗らないようにする。行ごとにちょうど一つずつ置くことになるので、置き方は列の並べ方（$n!$ 通り）の一部である。

問い：置き方は何通りあるか。盤を大きくすると増えるか。

2. 数える

計算 2.1：一行ずつ置き、使った列と二方向の斜めを桁で覚えて、取り合わない所だけを試す探索で数えた。盤の回転と裏返しの 8 通りで重なるものを一つとまとめた数も、$n \le 10$ で数えた。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
置き方	1	0	0	2	10	4	40	92	352	724	2680	14200
まとめると	1	0	0	1	2	1	6	12	46	92	—	—

> **観察 2.2**
>
> 8×8 の 92 通りは、まとめると 12 通りである。回転と裏返しで互いに移り合う置き方は、同じ形の置き方と見なせる——本当に違う形は 12 通りしかない。

> **観察 2.3**
>
> これが本稿の芯である。盤を大きくしても、置き方が増えるとは限らない。5×5 の 10 通りから、6×6 では 4 通りに減る。まとめると 6×6 は 1 通りしかない——7×7 で 40 通りに戻り、そこから先は増えていく。2×2・3×3 の 0 と、6×6 の落ち込みは、盤の大きさの細かい性質で決まる。

3. 二つの探し方

計算 3.1：桁で覚える探索とは独立に、列の並べ方 $n!$ 通りを全部作り、斜めに重ならないものを数えた。$n = 4$ から 8 で、どちらの探し方も同じ数（$2, 10, 4, 40, 92$）になった。

観察 3.2

「行と列に一つずつ」の並べ方のうち、斜めでも取り合わないのは一握りである。8×8 では $8! = 40320$ 通りのうち 92 通りしか残らない——斜めの条件が、並べ方の大半を消している。

4. 分離子

観察 4.1

分離子は、盤の大きさ n そのものである。置き方の数は n とともに大きくなる傾向があるが、$n = 6$ で一度落ち込む。n が大きくなれば必ず増える、とは言えない——大きさだけでなく、斜めの線がどう盤を切るかが数を決める。

観察 4.2

論文604 と並べる。604 は、6 次のラテン方陣に直交する相手が一つも無いことを示した——ラテン方陣もクイーンの置き方も「行と列に一つずつ」の並べ方で、どちらも 6 で数が落ち込む。ただしクイーンは 6×6 でも 4 通り置けるので、無くなるわけではない。

観察 4.3

言わないこと。一般の n の漸近式は扱わない。一つの置き方を速く作る方法も扱わない——示したのは、$n = 12$ までの数え上げ、対称でまとめた数、二つの探し方の一致である。

5. 点呼と結び

1. 8×8 は 92 通り（計算 2.1）：知られた値と一致。
2. まとめると 12 通り（観察 2.2）：回転と裏返しで。
3. 2×2・3×3 は 0（計算 2.1）：置けない。
4. 5×5 は 10、6×6 は 4（観察 2.3）：本稿の芯。
5. 6×6 はまとめると 1 通り（計算 2.1）：形は一つ。
6. 12×12 は 14200 通り（計算 2.1）：大きくなれば増える傾向。

7. 二つの探し方が $n = 4$ から 8 で一致（計算 3.1）：二つの道筋。
8. 40320 通りのうち 92 通り（観察 3.2）：斜めが大半を消す。
9. 分離子は盤の大きさそのもの（観察 4.1）：単調ではない。
10. ラテン方陣と同じく 6 で落ち込む（観察 4.2）：論文604。

結び：$n \times n$ の盤に、取り合わない n 個のクイーンを置く。8×8 では 92 通りで、盤の回転と裏返しでまとめると 12 通りである——二つの探し方が $n = 4$ から 8 で一致した。盤を大きくしても、置き方が増えるとは限らない——2×2 と 3×3 には置けず、6×6 の 4 通りは 5×5 の 10 通りより少ない。7×7 から先は増え、12×12 で 14200 通りになる。既刊との位置——論文604 のラテン方陣と同じく「行と列に一つずつ」の並べ方で、どちらも 6 で数が落ち込む。正直に言えば——12 までを数えただけで、一般の n の振る舞いには入っていない。

参考文献

1. Bell, J., & Stevens, B. (2009). A survey of known results and research areas for n-queens. *Discrete Mathematics*.
2. Rivin, I., Vardi, I., & Zimmermann, P. (1994). The n-queens problem. *The American Mathematical Monthly*.
3. 山岸勇輝 (2026).『6 次のラテン方陣には、直交する相手が一つも無い』[論文604]. Zenodo. 10.5281/zenodo.23014438

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)