52 枚の札は完全なシャッフル 8 回で元に戻り、乱雑なシャッフル 7 回でほぼ混ざる

— 一番上の札を上に残すと 8 回、下に入れると 52 回で元の並びに戻る — 同じ切り方を乱雑にすると、7 回で元の並びとの隔たり（全変動距離）が 0.334061 まで下がる — [論文626]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

札の山を半分に分け、左右から一枚ずつ交互に重ねる切り方を完全シャッフルという。一番上の札を上に残すものをアウト、一枚目を下に入れて一番上の札を二枚目にするものをインと呼ぶ。何回で元に戻るかと、同じ切り方が乱雑なら何回で混ざるかを数える。新しい定理も法則も主張しない。 第一に、52 枚はアウト 8 回、イン 52 回で元に戻る——実際に切って数えると、アウトは 8 回、インは 52 回で元の並びに戻った（第2節）。 第二に、回数は 2 の位数で決まる——アウトの回数は 2 の冪を $n-1$ で割った余りが初めて 1 になる回数、インは $n+1$ で割った余りの回数である。4 枚から 100 枚の偶数枚すべてで、実際に切った回数と一致した。50 枚ならアウト 21 回・イン 8 回、64 枚ならアウト 6 回・イン 12 回で、枚数が一枚違うだけで大きく変わる（第2節）。 第三に、一番上の札を好きな位置へ送れる——行きたい位置を二進法で書き、上の桁から 1 ならイン、0 ならアウトとすると、一番上の札を 52 枚の 0 番目から 51 番目のどこへでも 6 回以内で送れた（第3節）。 第四に、これが本稿の芯である。同じ「交互に重ねる」切り方が、完全なら元に戻り、乱雑なら混ざる——半分に分ける位置と、左右どちらから落とすかを乱雑にしたリフル（ギルバート＝シャノン＝リーズの模型）では、元の並びとの隔たり（全変動距離）が 4 回までは 1.000000、5 回で 0.923733、6 回で 0.613550、7 回で 0.334061、8 回で 0.167159 と下がる。完全シャッフルの 8 回が元の並びに戻すのと同じ回数で、乱雑なリフルはほぼ混ぜ切る（第4節）。 キーワード：完全シャッフル、ファロシャッフル、2 の位数、リフルシャッフル、札の混ざり方。

> 本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——完全シャッフルの回数が 2 の位数で決まること（ダイアコニス、グラハム、カンターの 1983 年の論文ほか）、乱雑なリフルの混ざり方の式（ベイヤーとダイアコニス、1992）は、いずれも既知である。手品の技法を論じない——完全シャッフルを実際に手でできるかは扱わない。乱雑なリフルの模型は一つである——人の切り方がこの模型に従うかは扱わない。既刊との関係：論文603は、2 の冪を 561 で割った余りを追ってフェルマーの判定を調べた——ここでは 2 の冪を 51 で割った余りが 1 に戻る回数が、札が元に戻る回数になる。加えたのは、4 枚から 100 枚で実際に切る道筋と 2 の位数の道筋を突き合わせたこと、二進法で一番上の札を送る手順を 52 通りすべてで確かめたこと、分離子を「決まった切り方か乱雑か」に置き、乱雑なリフルの隔たりを並べたことである。

1. 記法と問い

設定：n 枚（偶数）の山を上下半分に分け、二つの山から一枚ずつ交互に重ねる。上の山の一枚目が一番上に来るものをアウト、下の山の一枚目が一番上に来るものをインとする。アウトでは一番上と一番下の札が動かず、ほかの札の位置は 2 倍して $n-1$ で割った余りへ移る。インでは位置（1 から数える）が 2 倍して $n+1$ で割った余りへ移る。

問い：何回で元に戻るか。同じ切り方を乱雑にすると何回で混ざるか。

2. 元に戻る回数

計算 2.1：実際に切って元に戻るまでの回数と、2 の冪を割った余りが初めて 1 になる回数（2 の位数）を比べた。

枚数	アウト（2 の位数 $\bmod n-1$）	イン（2 の位数 $\bmod n+1$）
8	3	6
10	6	10
32	5	10
50	21	8
52	8	52
54	52	20
64	6	12

4 枚から 100 枚の偶数枚すべてで、実際に切った回数と 2 の位数が一致した。

> **観察 2.2**
>
> 52 枚のアウトが 8 回で済むのは、$2^8 = 256$ を 51 で割ると余りが 1 だからである。インでは 53 で割るので、余りが 1 に戻るのは 2^{52} で、52 回かかる——一番上の札を上に残すか下に入れるかの違いが、割る数を 51 と 53 に分け、回数を 8 と 52 に分ける。

3. 一番上の札を送る

計算 3.1：行きたい位置 p（0 から 51）を二進法で書き、上の桁から 1 ならイン、0 ならアウトを行った。52 通りすべてで、一番上の札が位置 p に来た。51 は二進法で 6 桁なので、多くとも 6 回である。

> **観察 3.2**
>
> インは一番上の札の位置を 2 倍して 1 を足し、アウトは 2 倍する。だから二進法の桁を上から一つずつ書き足すのと同じになる——完全シャッフルは、二進法の足し算を札でしているにすぎない。

4. 乱雑なリフル

計算 4.1：半分に分ける位置を二項分布で、左右どちらから札を落とすかを残りの枚数に比例する確率で決める乱雑なリフル（ギルバート＝シャノン＝リーズの模型）で、52 枚が k 回で元の並びからどれだけ隔たったか（全変動距離）を、ベイヤーとダイアコニスの式で正確に求めた。

回数	4	5	6	7	8	9	10	12
全変動距離	1.000000	0.923733	0.613550	**0.334061**	0.167159	0.085420	0.042946	0.010755

> **観察 4.2**
>
> これが本稿の芯である。同じ「交互に重ねる」切り方が、完全なら元に戻り、乱雑なら混ざる。完全シャッフルは 8 回で 52 枚を元の並びに戻す。乱雑なリフルは 4 回までは元の並びの面影を残し（隔たり 1.000000）、7 回で 0.334061、8 回で 0.167159 まで混ぜる——分けているのは切り方の回数ではなく、切り方が決まっているか乱雑かである。

5. 分離子

> **観察 5.1**
>
> 分離子は、切り方が決まっているか乱雑かである。決まっていれば、札の並べ替えは一つの置換のくり返しで、いつか必ず元に戻る。乱雑なら、並べ替えが毎回違い、並びは一様に近づく——そして決まっている中でも、アウトとインの違いが割る数を変え、回数を 8 から 52 に変える。

> **観察 5.2**
>
> 論文603 と並べる。603 は 2 の冪を 561 で割った余りを追い、561 が素数でないのに判定を通ることを示した——ここでは同じ 2 の冪の余りが、札が元に戻る回数を数える。53 は素数で、2 の位数が 52 と最大になるので、インは 52 回かかる。

> **観察 5.3**
>
> 言わないこと。手品の技法は論じない。人の切り方が乱雑なリフルの模型に従うかも扱わない——示したのは、実際に切る回数と 2 の位数の一致、二進法で札を送る手順、乱雑なリフルの隔たりの並びである。

6. 点呼と結び

1. 52 枚はアウト 8 回で戻る（計算 2.1）：2^8 を 51 で割ると余り 1。
2. イン 52 回（計算 2.1）：53 で割るから。
3. 4〜100 枚で 2 の位数と一致（計算 2.1）：二つの道筋。
4. 50 枚はアウト 21 回（計算 2.1）：枚数で大きく変わる。
5. 二進法で一番上の札をどこへでも（計算 3.1）：多くとも 6 回。
6. インは 2 倍して 1、アウトは 2 倍（観察 3.2）：二進法の書き足し。
7. 乱雑なリフル 7 回で 0.334061（計算 4.1）：ほぼ混ざる。
8. 4 回までは 1.000000（計算 4.1）：面影が残る。
9. 完全なら戻り、乱雑なら混ざる（観察 4.2）：本稿の芯。
10. 2 の冪の余りが回数を数える（観察 5.2）：論文603。

結び：札を半分に分けて交互に重ねる完全シャッフルは、52 枚ならアウト 8 回、イン 52 回で元の並びに戻る。回数は 2 の位数で決まる——2 の冪を 51 か 53 で割った余りが 1 に戻る回数で、4 枚から 100 枚のすべてで実際に切った回数と一致した。一番上の札は、二進法の桁どおりにインとアウトを選べばどこへでも送れる。同じ切り方が、完全なら元に戻り、乱雑なら混ざる——乱雑なリフルでは元の並びとの隔たりが 7 回で 0.334061、8 回で 0.167159 まで下がる。分離子は、切り方が決まっているか乱雑かである。既刊との位置——論文603 の 2 の冪の余りが、ここでは札の戻る回数を数える。正直に言えば——手品にも、人の切り方が模型に従うかにも入っていない。

参考文献

1. Bayer, D., & Diaconis, P. (1992). Trailing the dovetail shuffle to its lair. *The Annals of Applied Probability*.
2. Diaconis, P., Graham, R. L., & Kantor, W. M. (1983). The mathematics of perfect shuffles. *Advances in Applied Mathematics*.
3. 山岸勇輝 (2026). 『561 は、互いに素などの底で試しても、フェルマーの判定を通る』[論文603]. Zenodo. 10.5281/zenodo.23014433

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)