8×8の盤から二マスを欠いてドミノで敷けるかは、二マスの色だけで決まる

— 8×8の盤を2×1のドミノで敷く仕方は12988816通り — 敷き方の数は欠く場所で418000から6494408まで変わるが、0になるかは色だけで決まる — [論文627]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

2×1のドミノで盤を隙間なく、重ねずに覆う仕方を数える。8×8の盤そのものと、そこから二マスを欠いた盤を扱う。新しい定理も法則も主張しない。 第一に、8×8は12988816通り——一列ずつ、次の列へはみ出すマスを覚えて進める数え上げと、カステレインの積の式が、辺が2から8で面積が偶数の盤すべてで一致した。$2\times n$の盤は1・2・3・5・8と続くフィボナッチ数で、$n=10$で89通りである（第2節）。 第二に、これが本稿の芯である。同じ色の二マスを欠くと、敷き方は0通りになる——市松に塗ると、ドミノは必ず違う色を一つずつ覆う。向かい合う角は同じ色なので、欠くと一方の色が30マス、もう一方が32マスになり、31枚のドミノが覆う各色31マスと合わない。二マスを欠く2016通りを全部数えると、同じ色を欠いた992通りはすべて0通りだった（第3節）。 第三に、違う色の二マスを欠くと、どこを欠いても敷ける——違う色を欠いた1024通りは、すべて1通り以上敷けた。敷き方の数は欠く場所で変わり、最も少ないのは418000通り（欠けていない盤の0.032182倍）、最も多いのは6494408通りで、角とその隣を欠いた場合がそうである。これは欠けていない盤のちょうど半分になる（第4節）。 第四に、大きな盤では、一マスあたりの対数がカタランの定数に近づく——敷き方の数の自然対数をマスの数で割ると、8×8で0.255931、200×200で**0.290072**となり、カタランの定数Gをπで割った0.291561との差は0.001489である（第5節）。 キーワード：ドミノ敷き詰め、欠けたチェス盤、ゴモリーの定理、カステレインの式、完全マッチング。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——敷き方の数の積の式（カステレイン、テンパリーとフィッシャー、1961）、向かい合う角を欠いた盤が敷けないこと（欠けたチェス盤の問題）、違う色の二マスならどこを欠いても敷けること（ゴモリーの定理として知られる）、大きな盤での極限 G/π は、いずれも既知である。ゴモリーの定理を証明しない——8×8 で違う色を欠く 1024 通りを数えて確かめただけである。一般の穴の開いた盤、ドミノ以外の駒は扱わない。既刊との関係：論文601 は、盤が二色に塗り分けられることから、15 パズルの局面の半分に届かないことを示した——同じ塗り分けが、ここでは同じ色を二つ欠いた盤を敷けなくする。論文625 は、ナイトが一手ごとに色を替えることから、マスの数が奇数の盤には最初のマスへ戻る巡回が無いことを示した——ここではドミノが二色を一つずつ覆うことが、色の数の釣り合いを求める。加えたのは、一列ずつの数え上げと積の式を突き合わせたこと、二マスを欠く 2016 通りを全部数え、色の数えと突き合わせたこと、分離子を欠いた二マスの色に置いたことである。

1. 記法と問い

設定：m 行 n 列の盤を、隣り合う二マスを覆う 2×1 のドミノで、隙間なく重ねずに覆う。その仕方の数を $T(m,n)$ と書く。マスは行と列を 0 から数えて (r,c) と書き、$r+c$ の偶奇で二色に塗る。

問い：8×8 は何通りか。二マスを欠くと、敷けるかどうかは何で決まるか。

2. 盤全体の敷き方

計算 2.1：一列ずつ、次の列へはみ出すマスの組を覚えて進める数え上げで、敷き方を数えた。辺がどちらも偶数の盤では、カステレインの積の式

$$T(m,n)=\prod_{j=1}^{m/2}\prod_{k=1}^{n/2}\left(4\cos^2\frac{\pi j}{m+1}+4\cos^2\frac{\pi k}{n+1}\right)$$

でも求めた（一方の辺が奇数の盤では、その辺の積の上限を $(m+1)/2$ にする）。辺が 2 から 8 で面積が偶数の盤すべてで、二つが一致した。

盤	数え上げ	積の式
2×8	34	34.000000
4×4	36	36.000000
6×6	6728	6728.000000
8×8	12988816	12988816.000000

> **観察 2.2**
>
> $2 \times n$ の盤の敷き方は $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 13 \cdot 21 \cdot 34 \cdot 55 \cdot 89$ と、フィボナッチ数になる。左端の列は、縦のドミノ一枚で埋めるか、横のドミノ二枚で二列を埋めるかのどちらかで、残りは $2 \times (n-1)$ か $2 \times (n-2)$ の盤になる——前の二つを足す規則が、盤の端の置き方から出る。

3. 同じ色を二つ欠いた盤

計算 3.1：8×8 の盤は、二色がどちらも 32 マスである。向かい合う角 $(0,0)$ と $(7,7)$ は同じ色で、欠くと一方の色が 30 マス、もう一方が 32 マスになる。ドミノ 31 枚は、各色をちょうど 31 マスずつ覆う。同じ色の二マスを欠く 992 通りをすべて一列ずつの数え上げで数えると、すべて 0 通りだった。

> **観察 3.2**
>
> これが本稿の芯である。ドミノは隣り合う二マスを覆い、隣り合う二マスは必ず違う色なので、どう置いても二色を一つずつ覆う。だから敷けるには、二色の数が等しくなければならない——同じ色を二つ欠くと数が 2 ずれ、敷き方は置き方を探す前に 0 と決まる。数え上げはこの 992 通りで一度も 0 以外を出さなかった。

4. 違う色を二つ欠いた盤

計算 4.1：違う色の二マスを欠く 1024 通りをすべて数えた。すべて 1 通り以上敷けた。

欠いた二マス（例）	敷き方	欠けていない盤との比
最も少ない：$(0,1)$ と $(6,6)$	**418000**	**0.032182**
隣り合う二マス：$(0,0)$ と $(0,1)$	**6494408**	**0.500000**
左上と左下の角：$(0,0)$ と $(7,0)$	**2436304**	—
最も多い：$(7,6)$ と $(7,7)$	**6494408**	**0.500000**

観察 4.2

角とその隣を欠いた盤の敷き方は、欠けていない盤のちょうど半分になる。欠けていない盤で、角のマスは横のドミノか縦のドミノのどちらかで覆われる。盤を対角線で折り返すと二つは入れ替わるので、どちらも半分ずつである——角とその隣を欠いた盤の敷き方は、そこに横のドミノを置いた敷き方と同じ数だから、**12988816** の半分の **6494408** になる。

観察 4.3

違う色なら、敷き方の数は欠く場所で約 **0.03** 倍から **0.5** 倍まで変わるが、**0** にはならない。色が同じか違うかは、**0** になるかどうかを決め、欠く場所は、いくつあるかを決める——二つの問いは、別の量に答えている。

5. 大きな盤

計算 5.1：正方形の盤で、敷き方の数の自然対数をマスの数で割った値を、積の式から求めた。

盤	8×8	20×20	60×60	200×200	G/π
一マスあたりの対数	**0.255931**	**0.276908**	**0.286619**	**0.290072**	**0.291561**

200×200 と **G/π** の差は **0.001489** である。盤が大きくなるほど、端の効き目が薄れて近づく。

6. 分離子

観察 6.1

分離子は、欠いた二マスの色が同じか違うかである。同じなら **992** 通りすべてで **0**、違えば **1024** 通りすべてで敷ける——欠く場所は敷き方の数を **418000** から **6494408** まで動かすが、敷けるかどうかは動かさない。

観察 6.2

論文601 と論文625 と並べる。601 では、空所が一手ごとに色を替えることが、15 パズルの届く局面を半分にした。625 では、ナイトが一手ごとに色を替えることが、奇数の盤の閉じた巡回を禁じた——ここではドミノが二色を一つずつ覆うことが、同じ色を欠いた盤を敷けなくする。三つとも、市松の塗り分けが「できない」を置き方を探す前に決める。

観察 6.3

言わないこと。ゴモリーの定理を一般の盤で証明しない。一般の穴の開いた盤、ドミノ以外の駒も扱わない——示したのは、二つの道筋の一致と、8×8 で二マスを欠く 2016 通りの数えである。

7. 点呼と結び

1. 8×8 は 12988816 通り（計算 2.1）：二つの道筋が一致。
2. $2 \times n$ はフィボナッチ数（観察 2.2）：端の置き方から。
3. 同じ色を欠くと 30 マスと 32 マス（計算 3.1）：31 枚と合わない。
4. 同じ色の 992 通りはすべて 0（計算 3.1）：数え上げで。
5. ドミノは二色を一つずつ覆う（観察 3.2）：本稿の芯。
6. 違う色の 1024 通りはすべて敷ける（計算 4.1）：ゴモリーの定理と合う。
7. 最も少ないのは 418000（計算 4.1）：欠けていない盤の 0.032182 倍。
8. 角とその隣でちょうど半分（観察 4.2）：折り返しの対称。
9. 200×200 で 0.290072（計算 5.1）：G/π に近づく。
10. 市松が置き方を探す前に決める（観察 6.2）：論文601・論文625。

結び：8×8 の盤をドミノで敷く仕方は 12988816 通りで、一列ずつの数え上げとカステレインの積の式が一致した。二マスを欠いた盤が敷けるかは、二マスの色だけで決まる——ドミノは必ず二色を一つずつ覆うので、同じ色を欠いた 992 通りはすべて 0 通り、違う色を欠いた 1024 通りはすべて敷けた。欠く場所は敷き方の数を 418000 から 6494408 まで動かすが、0 になるかどうかは動かさない。大きな盤では、一マスあたりの対数が G/π に近づく。既刊との位置——論文601 と論文625 で届かない局面と戻れない巡回を決めた市松の塗り分けが、ここでは敷けない盤を決める。正直に言えば——ゴモリーの定理は 8×8 で数えただけで、一般の盤では証明していない。

参考文献

1. Kasteleyn, P. W. (1961). The statistics of dimers on a lattice: I. The number of dimer arrangements on a quadratic lattice. *Physica*.
2. Temperley, H. N. V., & Fisher, M. E. (1961). Dimer problem in statistical mechanics—an exact result. *Philosophical Magazine*.
3. 山岸勇輝 (2026). 『15 パズルの局面の半分は、どう動かしても届かない』[論文601]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22805752
4. 山岸勇輝 (2026). 『マスの数が奇数の盤には、ナイトが最初のマスへ戻る巡回が無い』[論文625]. Zenodo. 10.5281/zenodo.23014535

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)