期待値が無限の賭けも、胴元の資金を 10^{12} 円に限れば約 41 円になる

— 胴元が払えるのが B 円までなら、期待値は $\log_2 B$ より 0.947435 から 0.987341 多いだけ — 対数の効用で測れば確実な額は 4 円、上限なしで n 回遊んだ平均は n とともに伸び続けて落ち着かない —

[論文629]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

表が出るまで硬貨を投げ、k 回目に初めて表が出たら 2^k 円もらう賭け（サンクトペテルブルクの賭け）を考える。期待値は無限大である。何かを有限にすると、その無限がどこへ行くかを数える。新しい定理も法則も主張しない。 第一に、期待値は無限大である——k 回目に初めて表が出る確率は $1/2^k$、もらう額は 2^k 円なので、どの k も期待値にちょうど 1 円ずつ足す。足す項が尽きないので、和は限りなく大きくなる（第2節）。 第二に、胴元の資金を B 円に限ると、期待値は $\log_2 B$ ほどになる——2^k が B を超えたら B 円しか払えないとすると、期待値は $K + B/2^K$（K は 2^K が B 以下となる最大の整数）で、$B = 10^{12}$ 円でも 40.818989 円である。39 回目までが 1 円ずつ、その先がまとめて 1.818989 円になる。資金を 1000 倍にするごとに、期待値は 9.954224 から 9.957367 円しか増えない（第3節）。 第三に、対数の効用で測ると、確実な額は 4 円である——もらう額そのものではなく、その自然対数の期待値で測ると（ベルヌーイ）、値は $2\ln 2 = 1.386294$ で、同じ値打ちの確実な額はちょうど 4 円になる（第4節）。 第四に、これが本稿の芯である。上限なしで遊ぶ回数だけを有限にすると、平均は落ち着かない——n 回遊んだ平均の賞金を乱数で求め、41 回くり返した中央値を取ると、$n = 100$ で 8.62 円、$n = 10^6$ で 22.295930 円だった。n を 10^4 倍にすると平均は 13.675930 円伸び、$\log_2 10^4 = 13.287712$ との差は 0.388218 である。平均は n の対数ほどで伸び続ける（第5節）。 第五に、分離子は、何を有限にするかである——胴元の資金を有限にすれば期待値は $\log_2 B$ ほど、効用を対数にすれば確実な額は 4 円、遊ぶ回数を有限にすれば平均は有限だが n とともに伸び続ける。無限は、どこを切るかで別の姿で残る（第6節）。 キーワード：サンクトペテルブルクの賭け、期待値、対数効用、胴元の資金、ダニエル・ベルヌーイ。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——この賭けの期待値が無限であること、対数の効用で測ると有限になること（ダニエル・ベルヌーイ、1738）、遊んだ平均が n の対数ほどで伸びること（フェラー、1945）は、いずれも既知である。賭けを勧めない。効用の理論の是非を論じない——対数の効用は、有限にする仕方の一つとして計算するだけである。乱数の実験は一回の種による——中央値の $\log_2 n$ からのずれ（$+1.976144$ から $+3.312216$）は種で動く。既刊との関係：論文298 は、倍賭けの戦略が勝率 99.9999% でも、資金の柵が期待値をちょうど 0 にすることを示した——ここでは同じ資金の柵が、無限の期待値を $\log_2 B$ ほどに縮める。加えたのは、上限つきの期待値を二つの道筋（定義どおりの和と $K + B/2^K$）で突き合わせたこと、遊ぶ回数を 10^2 から 10^6 まで変えた乱数の実験、分離子を「何を有限にするか」に置いたことである。

1. 記法と問い

賭け：表が出るまで硬貨を投げる。k 回目に初めて表が出たら 2^k 円もらう。k 回目に初めて表が出る確率は $1/2^k$ である。

問い：期待値が無限のとき、胴元の資金・効用・遊ぶ回数のどれかを有限にすると、何が残るか。

2. 期待値は無限大

> **観察 2.1**
>
> k 回目の項は、確率 $1/2^k$ と額 2^k の積で、ちょうど 1 円である。どの k も 1 円ずつ足し、項は尽きないので、期待値は限りなく大きい。大きな額はめったに出ないが、出る確率が半分になるたびに額が倍になるので、足される分は減らない。

3. 胴元の資金を限る

計算 3.1：2^k が B を超えたら B 円しか払えないとして、期待値を定義どおりの和 $\sum_k \min(2^k, B)/2^k$ と、式 $K + B/2^K$（K は $2^K \le B$ となる最大の整数）の二つで求め、一致を確かめた。

資金 B	期待値	$\log_2 B$	差	$B/2^K$
10^3	10.953125	9.965784	0.987341	1.953125
10^6	20.907349	19.931569	0.975780	1.907349
10^9	30.862645	29.897353	0.965292	1.862645
10^{12}	**40.818989**	39.863137	0.955852	1.818989
10^{15}	50.776357	49.828921	0.947435	1.776357

> **観察 3.2**
>
> K 回目までは 1 円ずつ、それより先はすべて B 円に切られ、まとめて $B/2^K$ 円（1 以上 2 未満）になる。10^{12} 円なら 39 回目までの 39 円と、その先の 1.818989 円である——資金を 1000 倍にするごとに期待値は 9.954224 から 9.957367 円しか増えず、$\log_2 1000 = 9.965784$ に近い。無限の期待値は、資金の対数に縮む。

4. 対数の効用

計算 4.1：もらう額の自然対数の期待値は $\sum_k k \ln 2/2^k = 2 \ln 2 = 1.386294$ である。同じ値打ちの確実な額は $e^{2 \ln 2} = 4.000000$ 円である。

> **観察 4.2**
>
> 額を対数で測ると、k 回目の項は $k \ln 2/2^k$ になり、額の倍々を確率の半々が上回る。だから和が有限になる——有限にしたのは払う額ではなく、額の測り方である。

5. 遊ぶ回数を限る

計算 5.1：上限なしで n 回遊んだ平均の賞金を乱数で求め、これを 41 回くり返して中央値を取った。

n	平均の中央値	$\log_2 n$	差
10^2	8.620000	6.643856	+1.976144
10^3	13.278000	9.965784	+3.312216
10^4	15.764000	13.287712	+2.476288
10^5	19.714700	16.609640	+3.105060
10^6	**22.295930**	19.931569	+2.364361

n を 10^2 から 10^6 にすると、平均の中央値は 13.675930 円伸びた。$\log_2 10^4 = 13.287712$ との差は 0.388218 である。

> **観察 5.2**
>
> これが本稿の芯である。遊ぶ回数を有限にすると平均は有限になるが、回数を増やすと伸び続け、落ち着く値が無い。回数が増えるほど、めったに出ない大きな額に出会うので、平均は n の対数ほどで伸びる——「何回も遊べば平均は期待値に落ち着く」という読み方は、期待値が有限のときの話である。

6. 分離子

> **観察 6.1**
>
> 分離子は、何を有限にするかである。胴元の資金なら期待値は $\log_2 B$ ほど、効用なら確実な額は 4 円、遊ぶ回数なら平均は $\log_2 n$ ほどで伸び続ける——同じ無限が、どこを切るかで、資金の対数・一つの定数・回数の対数という別の姿で残る。

> **観察 6.2**
>
> 論文298 と並べる。298 では、倍賭けの戦略が勝率 99.9999% でも、資金の柵が期待値をちょうど 0 にした——ここでは同じ資金の柵が、無限の期待値を $\log_2 B$ ほどに縮める。どちらも、確率ではなく資金が答を決める。

> **観察 6.3**
>
> 言わないこと。この賭けに払うべき額は言わない。効用の理論の是非も論じない。賭けを勧めない——示したのは、有限にする三つの仕方それぞれで残る数である。

7. 点呼と結び

1. どの k も 1 円ずつ（観察 2.1）：期待値は無限大。
2. 資金 10^{12} 円で **40.818989** 円（計算 3.1）：二つの道筋が一致。
3. $\log_2 B$ より **0.947435〜0.987341** 多い（計算 3.1）：資金の対数に縮む。
4. 1000 倍で約 **9.95** 円増える（観察 3.2）：$\log_2 1000$ に近い。
5. 対数の効用で **4** 円（計算 4.1）：$2\ln 2$ の指数。
6. 測り方を有限にした（観察 4.2）：払う額ではない。
7. $n = 10^6$ で **22.295930** 円（計算 5.1）：平均の中央値。
8. 10^4 倍で **13.675930** 円伸びる（計算 5.1）：$\log_2 10^4$ と **0.388218** 差。
9. 平均は落ち着かない（観察 5.2）：本稿の芯。
10. 資金の柵が答を決める（観察 6.2）：論文298。

結び：表が出るまで投げて 2^k 円もらう賭けは、どの k も 1 円ずつ足すので期待値が無限大である。胴元の資金を B 円に限ると期待値は $\log_2 B$ より 1 円弱多いだけで、10^{12} 円でも 40.818989 円になる。対数の効用で測れば確実な額は 4 円である。遊ぶ回数だけを限ると平均は有限になるが、回数とともに伸び続けて落ち着かない——n を 10^4 倍にすると平均の中央値は 13.675930 円伸びた。分離子は、何を有限にするかである。既刊との位置——論文298 で期待値を 0 にした資金の柵が、ここでは無限を資金の対数に縮める。正直に言えば——この賭けに払うべき額にも、効用の理論の是非にも入っていない。

参考文献

1. Bernoulli, D. (1954). Exposition of a new theory on the measurement of risk. *Econometrica*.
2. Feller, W. (1945). Note on the law of large numbers and “fair” games. *The Annals of Mathematical Statistics*.
3. 山岸勇輝 (2026).『勝率 **99.9999%** の戦略の期待値は、ちょうど **0** である』[論文298]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22171857

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)