無作為な弦が長い確率は、何を一様と置くかで 1/3 にも 1/2 にも 1/4 にもなる

— 両端を円周上に選ぶと **1/3**、半径の上に中点を選ぶと **1/2**、円板の中に中点を選ぶと **1/4**（ベルトランの逆説） — 平面に棒を無作為に投げて円に当たった弦は、長い割合・半径より長い割合・長さの平均の三つとも、半径の上に選ぶ仕方に合った — [論文630]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

半径 1 の円に「無作為に」弦を引き、内接正三角形の一辺 $\sqrt{3}$ より長くなる確率を求める。「無作為」の置き方を三つ取って乱数と式で数え、平面に棒を投げる実験がどれに合うかを見る。新しい定理も法則も主張しない。 第一に、答は三つに分かれる——両端を円周上に一様に選ぶと 1/3、半径を一本選んでその上に中点を一様に置くと 1/2、中点を円板の中に一様に置くと 1/4 になる。乱数 2000000 本ずつで、0.333147・0.499918・0.249906 だった（第2節）。 第二に、分かれるのは一つの境目だけではない——弦の長さの平均も、式で $4/\pi = 1.273240$・$\pi/2 = 1.570796$・$4/3$ と分かれ、乱数では 1.272753・1.570556・1.333237 だった。三つの置き方は、弦の長さの分布そのものが違う（第3節）。 第三に、これが本稿の芯である。三つの答は、弦を決める量のどれを一様と置くかの違いである——両端の位置か、中心から弦までの距離か、中点の位置か。長いのは中心からの距離が 1/2 未満のときで、この同じ出来事に、三つの置き方が別の確率を割り当てる。「無作為な弦」という言葉だけでは、どれを一様と置くかが決まらない（第2節・第5節）。 第四に、棒を投げる実験は、半径の上に選ぶ仕方に合う——広い正方形の中に一様な点を取り、一様な向きの直線を引くと、円に当たった 224442 本の弦は、$\sqrt{3}$ より長い割合が 0.499688、半径 1 より長い割合が 0.867102（半径の上に選ぶ仕方の式 $\sqrt{3}/2 = 0.866025$）、長さの平均が 1.571687（同じく $\pi/2$）で、三つとも三つの式のうち半径の上に選ぶ仕方に最も近かった。投げ方を決めると、答が一つに決まる（第4節）。 キーワード：ベルトランの逆説、幾何確率、無作為な弦、一様の置き方、ジェインズ。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——三つの答（ベルトラン、1889）と、平面に一様に投げた直線が $1/2$ を与えること（ジェインズの 1973 年の論文ほか）は、いずれも既知である。どれが「正しい」答かは主張しない——示すのは、棒を投げる一つの実験が半径の上に選ぶ仕方に合うことだけである。棒の実験は近似である——一辺 40 の正方形の中の一様な点を通る直線で、平面全体に一様な直線を近似した。既刊との関係：論文607 は、三目並べの同じ手順の木に三つの別の重みを置くと、先手の勝つ割合が三つに分かれることを示した——ここでは同じ円の弦に三つの別の一様を置くと、長い確率が三つに分かれる。論文611 は、司会者の開け方を決めると扉を替えて当たる確率が決まることを示した——ここでは棒の投げ方を決めると、答が一つに決まる。論文164 は、コルモゴロフの公理が確率の値を一つも決めないことを点呼した——「無作為な弦」の三つの答は、どれも公理を満たす。加えたのは、三つの置き方を境目の確率と長さの平均の二つで比べたこと、棒を投げる実験を三つの量で三つの式と突き合わせたこと、分離子を「何を一様と置くか」に置いたことである。

1. 記法と問い

設定：半径 1 の円で、中心から弦までの距離を d とすると、弦の長さは $2\sqrt{1-d^2}$ である。弦が内接正三角形の一辺 $\sqrt{3}$ より長いのは、$d < 1/2$ のときである。

問い：「無作為に」引いた弦が $\sqrt{3}$ より長い確率はいくつか。

2. 三つの置き方

計算 2.1：三つの置き方で、乱数 2000000 本ずつの弦を作った。

置き方	一様に置くもの	式	乱数
両端	円周上の二点	$1/3$	0.333147
半径	半径の上の中点（距離 d）	$1/2$	0.499918
中点	円板の中の中点	$1/4$	0.249906

観察 2.2

三つとも、長いのは $d < 1/2$ という同じ出来事である。両端の置き方では、一端を固定すると、もう一端が向かい側の全周の $1/3$ の弧に入れば長い。半径の置き方では、d が 0 から 1 に一様なので $1/2$ である。中点の置き方では、中点が半径 $1/2$ の円に入る確率で、面積の比の $1/4$ である——同じ出来事に、d の分布の違いが別の確率を割り当てる。

3. 長さの平均

計算 3.1：同じ乱数で、弦の長さの平均と、弦が半径 1 より長い割合を求めた。

置き方	長さの平均（式）	長さの平均（乱数）	半径より長い割合（式・乱数）
両端	$4/\pi = 1.273240$	1.272753	$2/3 = 0.666667$ ・ 0.666401
半径	$\pi/2 = 1.570796$	1.570556	$\sqrt{3}/2 = 0.866025$ ・ 0.865699
中点	$4/3 = 1.333333$	1.333237	$3/4$ ・ 0.749811

> **観察 3.2**
>
> 三つの置き方は、一つの境目の確率だけでなく、弦の長さの分布そのものが違う。半径の置き方は長い弦を多く、両端の置き方は短い弦を多く出す——境目を $\sqrt{3}$ から 1 に替えても、三つの答は別々のままである。

4. 棒を投げる

計算 4.1：一辺 40 の正方形の中に一様な点を取り、一様な向きの直線を引いた。円に当たった 224442 本の弦を、三つの量で三つの式と比べた。

量	棒	両端の式との差	半径の式との差	中点の式との差
$\sqrt{3}$ より長い割合	**0.499688**	—	—	—
半径より長い割合	0.867102	0.200435	0.001076	0.117102
長さの平均	1.571687	0.298447	0.000891	0.238354

$\sqrt{3}$ より長い割合 0.499688 は、三つの式 1/3・1/2・1/4 のうち 1/2 に最も近い。ほかの二つの量も、半径の置き方の式との差が最も小さかった。

観察 4.2

直線は、向きと中心からの距離の二つで決まる。向きを決めると、平面に一様に投げた直線の距離は一様になる——それは半径の上に中点を一様に置くのと同じである。投げ方という手続きを決めると、どれを一様と置くかが決まり、答が一つに決まる。

5. 分離子

観察 5.1

これが本稿の芯である。分離子は、何を一様と置くかである。両端の位置・中心からの距離・中点の位置のどれを一様とするかで、答が **1/3**・**1/2**・**1/4** に分かれる——「無作為な弦」という言葉は、弦の集まりを決めるが、その上の一様を決めない。

観察 5.2

論文607・**論文611**・**論文164** と並べる。**607** では、同じ手順の木に三つの重みを置いて、先手の勝つ割合が三つに分かれた。**611** では、司会者の開け方を決めると確率が決まった。**164** は、コルモゴロフの公理が確率の値を一つも決めないことを点呼した——ここでは、三つの答がどれも公理を満たし、棒の投げ方という手続きを決めて初めて一つに決まる。

観察 5.3

言わないこと。どれが「正しい」答かは主張しない。平面に一様な直線を唯一の自然な置き方とする議論（ジェインズ）の是非も論じない——示したのは、三つの置き方の数と、一つの実験がそのどれに合うかである。

6. 点呼と結び

1. 両端で **1/3**（計算 2.1）：乱数 **0.333147**。
2. 半径で **1/2**（計算 2.1）：乱数 **0.499918**。
3. 中点で **1/4**（計算 2.1）：乱数 **0.249906**。

4. 同じ出来事 $d < 1/2$（観察 2.2）：d の分布が違う。
5. 長さの平均も三つ（計算 3.1）：$4/\pi$・$\pi/2$・$4/3$。
6. 境目を替えても別々（観察 3.2）：分布そのものが違う。
7. 棒は 0.499688（計算 4.1）：$1/2$ に最も近い。
8. 三つの量とも半径の式に最も近い（計算 4.1）：差 0.001076・0.000891。
9. 何を一様と置くか（観察 5.1）：本稿の芯。
10. 手続きを決めて一つに決まる（観察 5.2）：論文607・論文611・論文164。

結び：半径 1 の円に無作為に弦を引くとき、$\sqrt{3}$ より長い確率は、両端を円周上に選ぶと $1/3$、半径の上に中点を選ぶと $1/2$、円板の中に中点を選ぶと $1/4$ になった。三つの答は、弦を決める量のどれを一様と置くかの違いである——長いという同じ出来事に、三つの置き方が別の確率を割り当て、長さの平均も別々になる。平面に棒を投げる実験は、三つの量とも半径の上に選ぶ仕方に合った——手続きを決めると、答が一つに決まる。分離子は、何を一様と置くかである。既刊との位置——論文607 の三つの重み、論文611 の司会者の規則と同じく、言葉だけでは確率が決まらない。正直に言えば——どれが「正しい」答かには入っておらず、棒の実験は広い正方形による近似である。

参考文献

1. Bertrand, J. (1889). *Calcul des probabilités*. Gauthier-Villars.
2. Jaynes, E. T. (1973). The well-posed problem. *Foundations of Physics*.
3. 山岸勇輝 (2026). 『「確率」は四つの住所を持つ』[論文164]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22092815
4. 山岸勇輝 (2026). 『三目並べで先手が勝つ割合は、何を等しいと置くかで三つに分かれる』[論文607]. Zenodo. 10.5281/zenodo.23014454
5. 山岸勇輝 (2026). 『扉を替えて当たる確率は、司会者がどう開けるかで決まる』[論文611]. Zenodo. 10.5281/zenodo.23014472

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)