道を一本足して全員が遅くなるのは、車が 3000 台と 9000 台のあいだだけである

— 4000 台なら 65 分の二つの経路に 0 分の近道を足すと、全員が近道を通って 80 分になる — 遅くなるのは 3000 台より多く 9000 台より少ないときだけで、落ち着き先と合計最小の比は 4500 台で 4/3 に届く — [論文631]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

出発から着までの経路が二つある。一つは「車の数 /100 分」の道のあとに 45 分の道、もう一つは 45 分の道のあとに「車の数 /100 分」の道である。ここに、二つの経路の途中をつなぐ 0 分の近道を足す。各自が自分の最短を選び、誰も一人だけ経路を替えて得をしなくなった所（落ち着き先）を、車の数を変えて数える（ブラエスの逆説）。新しい定理も法則も主張しない。 第一に、4000 台では、近道を足すと 65 分が 80 分になる——足す前は半分ずつ分かれて 65 分である。足した後の落ち着き先は、閉じた式でも、対称を仮定しない数値の解き方（フランク＝ウルフ法）でも、全員が近道を通る 80 分だった。ほかの経路は 85 分なので、誰も替えない（第2節）。 第二に、全員の合計を最小にする割り当てなら、近道で得をする——4000 台のうち 500 台だけに近道を通らせると、平均は 64.687500 分で、足す前の 65 分より短い。割り当てる者がいれば、道を足して悪くなることはない（第2節）。 第三に、これが本稿の芯である。遅くなるかどうかは、車の数で決まる——1 台から 12000 台まで一台ずつ調べると、近道で遅くなるのは 3001 台から 8999 台、速くなるのは 2999 台以下（1000 台なら 50 分が 20 分）で、9000 台以上では近道が使われない（第3節）。 第四に、落ち着き先と合計最小の比は、4500 台で 4/3 に届く——比の最大は 4500 台の 90 分対 67.5 分で、1.333333 である。所要が車の数の一次式の道では、この比が 4/3 を超えないことが知られており、この網はその上限にちょうど届く（第4節）。 キーワード：ブラエスの逆説、交通網、ワードロップ均衡、アナーキーの代償、利己的な経路選択。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——道を足すと落ち着き先が遅くなりうること（ブラエス、1968）、落ち着き先の条件（ワードロップ、1952）、所要が一次式なら落ち着き先と合計最小の比が 4/3 を超えないこと（ラフガーデンとタルドシュ、2002）は、いずれも既知である。上限 4/3 を証明しない——この網で比が 4/3 に届くことを数えるだけである。実際の道路や政策を論じない——45 分と「車の数 /100 分」の網は教科書でよく使われる例で、ブラエスの原論文の数ではない。既刊との関係：論文437 は、二人の利得表で、各自が最善を選ぶと合計が最小に落ちることを示し、分離子を「一人ずつか、まとめてか」に置いた——ここでは選べる道を一本増やすと全員が遅くなり、しかもそれは車の数がある範囲にあるときだけ起きる。論文462 は射程注記で、車線数・合流部などの道路の設計を主題にしないとした——本稿はその席で、道を一本足すことを扱う。加えたのは、落ち着き先を閉じた式と対称を仮定しない数値の解き方の二つで出したこと、車の数を一台ずつ変えて遅くなる範囲を数えたこと、分離子を車の数に置いたことである。

1. 記法と問い

網：出発から地点 A への道は、そこを通る車の数を x として $x/100$ 分かかる。A から着へは 45 分。出発から地点 B へは 45 分、B から着へは $x/100$ 分。足す近道は A から B への 0 分の道である。経路は「出発→A→着」「出発→B→着」「出発→A→B→着」の三つになる。

落ち着き先：使われている経路の所要がすべて等しく、使われていない経路の所要がそれ以上である状態。誰も一人だけ経路を替えて得をしない（ワードロップの条件）。

問い：近道を足すと、落ち着き先は速くなるか遅くなるか。それは何で決まるか。

2. 4000 台のとき

計算 2.1：近道を足す前は、2000 台ずつに分かれ、どちらの経路も $20 + 45 = 65$ 分である。

計算 2.2：近道を足した後の落ち着き先を、閉じた式と、全員を一つの経路に置くところから始める数値の解き方（フランク＝ウルフ法・対称を仮定しない）の二つで求めた。どちらも、4000 台全員が「出発→A→B→着」を通り、所要は $40 + 0 + 40 = 80$ 分だった。ほかの二つの経路は $40 + 45 = 85$ 分である。

観察 2.3

一人ひとりには、近道がいつも得に見える。「車の数 /100 分」の道は、全員が乗っても 40 分で、45 分の道より短い。だから誰もが両方の「$x/100$ 分」の道を選び、近道でつなぐ——その結果、全員が 65 分から 80 分へ、15 分遅くなる。

計算 2.4：全員の所要の合計を最小にする割り当ても、同じ二つの道筋で求めた。1750 台・1750 台・近道 500 台で、平均 64.687500 分だった。

> **観察 2.5**
>
> 割り当てる者がいれば、道を足して悪くなることはない。近道を使わない割り当てはいつでも選べるので、合計最小は道を足して増えない——遅くなったのは、各自が自分の最短を選んだ落ち着き先のほうである。

3. 車の数を変える

計算 3.1：車の数を変えて、足す前の所要、足した後の落ち着き先、合計最小の平均を並べた（代表の九つの台数では、落ち着き先を二つの道筋で出して 0.001 分以内で一致した）。

台数	足す前	足した後の落ち着き先	合計最小の平均	比
1000	50	20	20	1.000000
2000	55	40	40	1.000000
3000	60	60	56.25	1.066667
4000	65	80	64.6875	1.236715
4500	67.5	90	67.5	1.333333
6000	75	90	75	1.200000
8000	85	90	85	1.058824
9000	90	90	90	1.000000
10000	95	95	95	1.000000

1 台から 12000 台まで一台ずつ調べると、近道で遅くなるのは 3001 台から 8999 台の 5999 通り、速くなるのは 1 台から 2999 台だった。近道が使われなくなるのは 9000 台からである。

観察 3.2

これが本稿の芯である。道を足して遅くなるかは、車の数で決まる。台数を N とすると、足す前は $N/200 + 45$ 分、全員が近道を通れば $N/50$ 分である。N が 3000 より少なければ近道の $N/50$ が短く、足して速くなる。4500 台を超えると一部の車が近道を避け、落ち着き先は 90 分にとどまる——足す前の $N/200 + 45$ 分が 90 分に追いつく 9000 台で、近道は使われなくなり、差が消える。

4. 比の最大

計算 4.1：落ち着き先の所要を合計最小の平均で割った比は、4500 台で最大の **1.333333** になった（90 分対 67.5 分）。

観察 4.2

所要が車の数の一次式の道では、この比が 4/3 を超えないことが知られている。この網は、4500 台でその上限にちょうど届く——各自の選択が合計最小から離れる幅は、この形の網ではここまでである。

5. 分離子

観察 5.1

分離子は、車の数である。同じ網に同じ近道を足しても、2999 台以下なら速くなり、3001 台から 8999 台なら遅くなり、9000 台以上なら変わらない——「道を足すと遅くなる」は網だけの性質ではなく、網と車の数の組の性質である。

観察 5.2

論文437 と論文462 と並べる。437 では、二人がそれぞれ最善を選ぶと合計が最小に落ち、分離子は「一人ずつか、まとめてか」だった。ここでも、合計最小（まとめて）は近道で得をし、落ち着き先（一人ずつ）は損をする——そのうえで、損をするのは車の数がある範囲にあるときだけだと数えた。462 が射程注記で扱わないとした道路の設計のうち、道を一本足すことだけをここで扱った。

> **観察 5.3**
>
> 言わないこと。実際の道路で近道を閉じるべきかは論じない。上限 **4/3** も証明しない——示したのは、一つの網での落ち着き先と合計最小の数と、遅くなる台数の範囲である。

6. 点呼と結び

1. **4000** 台で **65** 分が **80** 分に（計算 2.2）：二つの道筋が一致。
2. ほかの経路は **85** 分（計算 2.2）：誰も替えない。
3. 近道はいつも得に見える（観察 2.3）：全員が乗っても **40** 分。
4. 合計最小なら **64.687500** 分（計算 2.4）：近道は **500** 台だけ。
5. 割り当てる者がいれば悪くならない（観察 2.5）：遅くなるのは落ち着き先。
6. 遅くなるのは **3001**〜**8999** 台（計算 3.1）：一台ずつ数えて。
7. **1000** 台なら **50** 分が **20** 分（計算 3.1）：少なければ速くなる。
8. 車の数で決まる（観察 3.2）：本稿の芯。
9. **4500** 台で比 **1.333333**（計算 4.1）：上限 **4/3** に届く。
10. 一人ずつは損、まとめては得（観察 5.2）：論文**437**・論文**462**。

結び：**45** 分の道と「車の数 **/100** 分」の道をつないだ二つの経路に **0** 分の近道を足すと、**4000** 台では各自が最短を選んだ落ち着き先が **65** 分から **80** 分になった。合計最小の割り当てなら近道で **64.687500** 分に縮むので、遅くなったのは一人ずつの選択の側である。遅くなるかどうかは車の数で決まる——**3001** 台から **8999** 台で遅くなり、**2999** 台以下では速くなり、**9000** 台以上では近道が使われない。落ち着き先と合計最小の比は **4500** 台で **4/3** に届く。分離子は、車の数である。既刊との位置——論文**437** の「一人ずつの最善が全体の最悪」に、道を足す向きと車の数の範囲を加えた。正直に言えば——実際の道路にも、上限 **4/3** の証明にも入っていない。

参考文献

1. Braess, D. (1968). Über ein Paradoxon aus der Verkehrsplanung. *Unternehmensforschung*.
2. Roughgarden, T., & Tardos, É. (2002). How bad is selfish routing? *Journal of the ACM*.
3. Wardrop, J. G. (1952). Some theoretical aspects of road traffic research. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*.
4. 山岸勇輝 (2026).『各自が最善を選ぶと、二人とも最悪に着く』[論文437]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22709472
5. 山岸勇輝 (2026).『同じだけ運べる状態が、二つある』[論文462]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22733178

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)