大きい硬貨から払う両替は、円なら必ず最少枚数だが、旧英貨では 48 ペンスで一枚多くなる

— 旧英貨の 1・3・6・12・24 ペンスでも外れないが、半クラウン 30 ペンスを足すと 48 ペンスで 30＋12＋6 の三枚になり、24＋24 の二枚より多い — 外れるかどうかは、足した一枚と前の組の合わせ目の一点で分かる — [論文633]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— *From thinking to syncing.* —

要旨

額を払うのに、硬貨を大きい順に払えるだけ払う方法（貪欲法）を、最少枚数（動的計画法で全額を数えたもの）と比べる。どの硬貨の組で外れ、外れるときは何が起きているかを数える。新しい定理も法則も主張しない。 第一に、円では外れない——円の硬貨（1・5・10・50・100・500）に札（1000・2000・5000・10000）を加えても、米国の硬貨（1・5・10・25）でも、1 から 20000 までのどの額でも最少枚数になった。外れるなら最初の外れは大きい二枚の和より前に来ること（コーゼンとザクス）が知られており、円の札まで入れても 15000 なので、全額について外れない（第2節）。 第二に、旧英貨に半クラウンを足すと、48 ペンスで外れる——十進法より前の英国の 1・3・6・12・24 ペンスは外れないが、半クラウン 30 ペンスを足すと、48 ペンスを 30＋12＋6 の三枚で払い、24＋24 の二枚より多い。20000 までに 3993 通りの額で外れ、どれも一枚多いだけだった。1・3・4 の組は 6 で、1・5・10・20・25 の組は 40 で外れる（第3節）。 第三に、これが本稿の芯である。外れない組に一枚足すと、外れる組になりうる——1・3 に 4 を、旧英貨に 30 を、1・5・10・20 に 25 を足すと、どれも外れる組になった。円に 2000・5000・10000 の札を順に足しても、外れないままだった（第4節）。 第四に、外れるかどうかは一点で分かる——足す硬貨 c を前の組の最大で割って切り上げた数を m とし、m 倍した前の最大の額だけを貪欲法で払ってみる。m 枚を超えれば外れる組、超えなければ外れない組である（マガジン、ネムハウザー、トロッターの一点の判定）。六つの足し方すべてで、この一点の判定が 20000 までの全額の判定と一致した（第4節）。 キーワード：両替問題、貪欲法、最少枚数、硬貨の体系、旧英貨。

> 本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——貪欲法が最少枚数から外れる硬貨の組があること、外れるなら最初の外れが大きい二枚の和より前に来ること（コーゼンとザクス、1994）、一枚足すときの一点の判定（マガジン、ネムハウザー、トロッター、1975）は、いずれも既知である。一点の判定を証明しない——六つの足し方で全額の判定と突き合わせただけである。硬貨の組の設計の是非や、硬貨の歴史は論じない。既刊との関係：論文348は、同じグラフの上で、全域木では貪欲法が最適になり、巡回路では外れることを示した——そこでは問題が成否を分けた。ここでは同じ両替の問題の中で、硬貨の組が成否を分ける。加えたのは、九つの組を20000まで全額で調べたこと、外れる組の外れ方（数と、一枚多いだけであること）を数えたこと、一点の判定を全額の判定と突き合わせ、分離子を「足した一枚が前の組に合うか」に置いたことである。

1. 記法と問い

設定：硬貨の組を決め、額 n を払う。貪欲法は、硬貨を大きい順に、払えるだけ払う。その枚数を $G(n)$、最少枚数を $M(n)$ とする。$M(n)$ は、小さい額から順に「一枚使って残りを最少で払う」を積み上げる動的計画法で、1から20000までのすべての額について求めた。$G(n) > M(n)$ となる額を「外れ」と呼ぶ。

問い：どの組で外れるか。外れるとき、何が起きているか。

2. 外れない組

計算 2.1：1から20000までのすべての額で、$G(n)$ と $M(n)$ を比べた。

硬貨の組	外れる額	大きい二枚の和
円の硬貨 $1, 5, 10, 50, 100, 500$	0通り	600
円の硬貨と札（$1000, 2000, 5000, 10000$ まで）	0通り	15000
米国 $1, 5, 10, 25$	0通り	35
$1, 3$	0通り	4
旧英貨 $1, 3, 6, 12, 24$	0通り	36
$1, 5, 10, 20$	0通り	30

> **観察 2.2**
>
> 外れるなら、最初の外れは大きい二枚の和より前に来る（コーゼンとザクス）。どの組も、この和は 20000 より小さいので、20000 まで外れないことは、どの額でも外れないことを意味する——円の硬貨と札は、全額について最少枚数で払える。

3. 外れる組

計算 3.1：同じ比べ方で、三つの組が外れた。

硬貨の組	最初の外れ	貪欲法	最少	20000 までの外れ
$1, 3, 4$	6	$4+1+1$（三枚）	$3+3$（二枚）	4999 通り
旧英貨 $1, 3, 6, 12, 24, 30$	48	$30+12+6$（三枚）	$24+24$（二枚）	3993 通り
$1, 5, 10, 20, 25$	40	$25+10+5$（三枚）	$20+20$（二枚）	3995 通り

最初の外れは、どれも大きい二枚の和（$7 \cdot 54 \cdot 45$）より前に来た。外れる額で貪欲法が最少より多く使うのは、どの組でも最大で一枚だった。旧英貨では 48 から 53 ペンスまで続けて外れる。

> **観察 3.2**
>
> 貪欲法は、一番大きい硬貨を取ったせいで、あとの払い方を悪くする。48 ペンスでは、まず 30 を取ると、残り 18 に当たる硬貨は無いので、どう払っても二枚は要り、合わせて三枚になる。30 を取らなければ、24 が二枚でちょうど払える——大きい硬貨が、二枚で一組の小さい硬貨の間に割り込んでいる。

4. 一枚足す

計算 4.1：外れない組に一枚足し、一点の判定（足す硬貨 c、前の最大 c_k、$m = \lceil c/c_k \rceil$ として、mc_k を貪欲法で払った枚数が m 以下か）と、20000 まで（小さい組は 2000 まで）の全額の判定を比べた。

前の組に足す硬貨	m	見る額	貪欲法の枚数	判定（一点・全額）
$1, 3$ に 4	2	6	3	外れる・外れる
旧英貨 $1, \ldots, 24$ に 30	2	48	3	外れる・外れる
$1, 5, 10, 20$ に 25	2	40	3	外れる・外れる
円（1000 まで）に 2000	2	2000	1	外れない・外れない
円（2000 まで）に 5000	3	6000	2	外れない・外れない
円（5000 まで）に 10000	2	10000	1	外れない・外れない

観察 4.2

これが本稿の芯である。外れるかどうかは、足した一枚が前の組に合うかで決まり、それは一点で分かる。旧英貨の 30 は 24 の二倍の 48 より手前にあり、48 を 30 から払い始めさせて三枚にする。円の 5000 は 2000 の三倍の 6000 を $5000 + 1000$ の二枚で払わせ、三枚より少ない——同じ「大きい順」が、足した一枚の置き場所で、正しくも誤りにもなる。

5. 分離子

観察 5.1

分離子は、足した一枚が前の組に合うかどうかである。合えば貪欲法は全額で最少、合わなければ外れる額が現れる。合うかどうかは、mc_k の一点で決まる——硬貨の枚数や額の大きさではなく、組の合わせ目が効く。

観察 5.2

論文348 と並べる。348 では、同じグラフで、全域木は貪欲法で最適になり、巡回路は外れた。成否を分けたのは問題の種類だった——ここでは同じ両替の問題で、成否を分けるのは硬貨の組である。そして外れても一枚多いだけだった。

> **観察 5.3**
>
> 言わないこと。硬貨の組の設計の是非や、硬貨の歴史は論じない。一点の判定も証明しない——示したのは、九つの組の全額の比べと、六つの足し方での一点の判定と全額の判定の一致である。

6. 点呼と結び

1. 円の硬貨と札は外れない（計算 2.1）：20000 まで全額で。
2. 大きい二枚の和より前に外れる（観察 2.2）：だから全額について言える。
3. 旧英貨＋30 は 48 で外れる（計算 3.1）：三枚対二枚。
4. $1, 3, 4$ は 6、$1, 5, 10, 20, 25$ は 40（計算 3.1）：同じ外れ方。
5. 外れても一枚多いだけ（計算 3.1）：20000 まで。
6. 大きい硬貨が割り込む（観察 3.2）：30 が $24 + 24$ を壊す。
7. 外れない組に一枚足すと外れうる（計算 4.1）：三つの例。
8. 円に札を足しても外れない（計算 4.1）：2000・5000・10000。
9. 一点の判定＝全額の判定（観察 4.2）：本稿の芯。
10. 問題でなく組が成否を分ける（観察 5.2）：論文348。

結び：硬貨を大きい順に払う貪欲法は、円の硬貨と札、米国の硬貨では、20000 までのどの額でも最少枚数になり、外れるなら大きい二枚の和より前に外れるので、全額について外れない。旧英貨の 1・3・6・12・24 ペンスに半クラウン 30 を足すと、48 ペンスを $30 + 12 + 6$ の三枚で払い、$24 + 24$ の二枚より多くなる。外れるかどうかは、足した一枚が前の組に合うかで決まり、m 倍した前の最大の一点で分かる——六つの足し方で、一点の判定が全額の判定と一致した。分離子は、足した一枚が前の組に合うかどうかである。既刊との位置——論文348 では問題が貪欲法の成否を分けたが、ここでは同じ問題の中で硬貨の組が分ける。正直に言えば——一点の判定の証明にも、硬貨の組の設計にも入っていない。

参考文献

1. Kozen, D., & Zaks, S. (1994). Optimal bounds for the change-making problem. *Theoretical Computer Science*.
2. Magazine, M. J., Nemhauser, G. L., & Trotter, L. E. (1975). When the greedy solution solves a class of knapsack problems. *Operations Research*.
3. 山岸勇輝 (2026).『同じグラフで、繋ぐのは安く、並べるのは高い』[論文348]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22683555

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)