5/121 を大きい単位分数から分けると分母は 25 桁、三つに分ければ 363 で済む

— 毎回いちばん大きい単位分数を取ると、**5/121** は五項になり最後の分母は **25** 桁 — 三項なら **1/33 + 1/121 + 1/363** で、最大の分母は **363** で済む — [論文634]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

分数を、相異なる単位分数（分子が 1 の分数）の和に表す（エジプト式分数）。毎回、残りを超えない最大の単位分数を取る方法（貪欲法）と、全探索で見つけた最も短い表し方を比べる。新しい定理も法則も主張しない。 第一に、**5/121** は貪欲法で五項になり、分母が **25** 桁に達する——分母は **25・757・763309・873960180913・152761279564209341884622 5** で、一つ前の分母の桁数に対する比は **2.059527・2.043246・2.029934・2.025209** と、ほぼ **2** である（第2節）。 第二に、三つに分ければ、最大の分母は **363** で済む——全探索では、**5/121** は二項では表せず、三項の表し方は **21** 通りあった。最大の分母が最も小さいのは **1/33 + 1/121 + 1/363** で、**21** 通りの最大の分母は **363** から **275275** までだった（第3節）。 第三に、これが本稿の芯である。貪欲法の外れ方は、項の数より分母の大きさに出る——貪欲法で次に取る分母 d' は、いま取った分母 d について必ず $d(d-1)$ より大きい。だから一度外れると分母の桁がほぼ倍ずつ増え、二項多いだけの差が、**3** 桁と **25** 桁の差になる（第2節・第4節）。 第四に、分子 **4・5** の分数では、ときどき外れる——分母 **200** 以下の既約分数で数えると、分子 **4** の **98** 個のうち **18** 個、分子 **5** の **156** 個のうち **23** 個で、貪欲法が最少より多い項を使った。**4/49** は貪欲法で四項（最後の分母 **9204734721**）だが、**1/14 + 1/98** の二項で表せる（第5節）。 キーワード：エジプト式分数、単位分数、貪欲法、シルベスターの数列、分母の増え方。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——どの分数も単位分数の和に表せること、貪欲法の項数が分子を超えないこと（フィボナッチ以来）、貪欲法の分母が急に増えること（シルベスター、1880）は、いずれも既知である。エルデシュとシュトラウスの予想（$4/n$ はいつも三項で表せるか）は扱わない——分母 200 以下の分子 4 と 5 の分数が、どれも三項以内で表せたことを数えただけである。既刊との関係：論文633 は、両替の貪欲法が外れる硬貨の組でも、最少より一枚多いだけであることを数えた——ここでは同じ「一番大きいものから取る」が、外れると分母を爆発させる。論文348 は、同じグラフで、全域木は貪欲法で最適になり、巡回路は外れることを示した——ここも外れる側で、その外れ方の大きさを測った。加えたのは、5/121 の三項の表し方を全探索で 21 通り並べたこと、分母の桁の比を数えたこと、分子 4・5 の分数で外れる数を数えたこと、分離子を「先を見ずに一番大きいものを取るか」に置いたことである。

1. 記法と問い

設定：正の分数 r を、相異なる単位分数 $1/d_1 + 1/d_2 + \cdots$ の和に表す。貪欲法は、r を超えない最大の単位分数 $1/d$（d は $1/r$ 以上の最小の整数）を取り、残り $r - 1/d$ に同じことをくり返す。全探索は、分母を小さい順に並べ、k 項で表す仕方をすべて数える（k 項なら最初の分母は k/r 以下）。

問い：貪欲法はいつ外れ、外れるとどうなるか。

2. 5/121 の貪欲法

計算 2.1：5/121 を貪欲法で分けた。和はちょうど 5/121 に戻った。

項	分母	桁数
1	25	2
2	757	3
3	763309	6
4	873960180913	12
5	1527612795642093418846225	25

分母の常用対数を一つ前と比べると、2.059527・2.043246・2.029934・2.025209 で、桁がほぼ倍ずつ増える。

> **観察 2.2**
>
> 貪欲法の次の分母は、いまの分母 d について $d(d-1)$ より大きい。$1/d$ を取ったのは残りが $1/(d-1)$ より小さかったからで、取った後の残りは $1/(d-1) - 1/d = 1/\{d(d-1)\}$ より小さい。次の単位分数はその残りを超えないので、分母は $d(d-1)$ より大きい——分母がほぼ二乗ずつ、つまり桁がほぼ倍ずつ増えるのは、貪欲法そのものの性質である。

> **観察 2.3**
>
> 項の数は分子を超えない。貪欲法では残りの分子が毎回減るので、分子 5 なら多くとも五項である。5/121 は、その上限の五項をすべて使う。分母 200 以下で数えると、分子 4 の分数は多くとも四項、分子 5 の分数は多くとも五項だった。

3. 全探索

計算 3.1：5/121 を二項・三項で表す仕方を、全探索ですべて数えた。二項では表せず、三項の表し方は 21 通りあった。最大の分母が最も小さいのは

$$\frac{5}{121} = \frac{1}{33} + \frac{1}{121} + \frac{1}{363}$$

で、21 通りの最大の分母は 363 から 275275 までだった。

> **観察 3.2**
>
> 最初の一手が違う。貪欲法は最初に 1/25 を取るが、最大の分母が最も小さい表し方の最初の分母は 33 である。最初の一手で、あとに残る分数が変わる——先を見ずに取った一手が、あとのすべての分母を決める。

4. 外れ方の大きさ

> **観察 4.1**
>
> これが本稿の芯である。貪欲法の外れ方は、項の数より分母の大きさに出る。$5/121$ では、項は三項に対して五項と二つ多いだけだが、最大の分母は 363 に対して 25 桁になる。観察 2.2 のとおり、外れた道に入ると分母はほぼ二乗ずつ増える——同じ「一番大きいものから取る」でも、両替のように一枚多いだけで済む問題と、外れが爆発する問題がある。

5. 分子 4 と 5 の分数

計算 5.1：分母 200 以下の既約分数 $4/b$ と $5/b$ で、貪欲法の項数と、全探索で見つけた最少の項数（三項まで）を比べた。どの分数も三項以内で表せたので、最少の項数は正確である。

分子	分数の数	貪欲法が最少より多い	例（分母・貪欲法・最少）
4	98	18	17・四項・三項、49・四項・二項
5	156	23	31・五項・三項、121・五項・三項

計算 5.2：$4/17$ は、貪欲法で $1/5+1/29+1/1233+1/3039345$ の四項になるが、三項なら $1/6+1/17+1/102$ で表せる（三項の表し方は 4 通り）。$4/49$ は、貪欲法で分母 13・213・67841・9204734721 の四項になるが、$1/14+1/98$ の二項で表せる。

> **観察 5.3**
>
> 外れるのは、ときどきである。分子 4 で 98 個のうち 18 個、分子 5 で 156 個のうち 23 個——多くの分数では貪欲法が最短になるが、外れる分数では分母が桁違いに大きくなる。

6. 分離子

> **観察 6.1**
>
> 分離子は、先を見ずに一番大きいものを取るかどうかである。貪欲法は一手ずつ最大を取り、全探索は全体を見て選ぶ。外れたとき、差は項の数ではなく分母の桁に出る——**4/49** では二項対四項、最大の分母は **98** 対 **10** 桁である。

> **観察 6.2**
>
> **論文633** と **論文348** と並べる。**633** では、両替の貪欲法が外れる組でも、最少より一枚多いだけだった。**348** では、巡回路で貪欲法が外れた——ここでは外れた貪欲法が分母を爆発させる。「貪欲法が外れる」の中にも、外れ方の大きさで別の顔がある。

> **観察 6.3**
>
> 言わないこと。エルデシュとシュトラウスの予想は扱わない。三項より長い表し方の全探索もしていない——示したのは、**5/121** と **4/17・4/49** の貪欲法と全探索、分子 **4・5** の分数で外れる数である。

7. 点呼と結び

1. **5/121** は貪欲法で五項（計算 2.1）：最後の分母は **25** 桁。
2. 桁の比はほぼ **2**（計算 2.1）：**2.059527** から **2.025209**。
3. 次の分母は $d(d-1)$ より大きい（観察 2.2）：貪欲法そのものの性質。
4. 項の数は分子を超えない（観察 2.3）：**5/121** は上限の五項。
5. 二項では表せず、三項は **21** 通り（計算 3.1）：全探索。
6. $1/33 + 1/121 + 1/363$（計算 3.1）：最大の分母 **363**。
7. 外れ方は分母に出る（観察 4.1）：本稿の芯。
8. 分子 **4** で **18** 個、分子 **5** で **23** 個（計算 5.1）：ときどき外れる。
9. **4/49** は四項対二項（計算 5.2）：$1/14 + 1/98$。
10. 両替は一枚、分数は桁（観察 6.2）：**論文633**・**論文348**。

結び：$5/121$ を、毎回残りを超えない最大の単位分数から分けると五項になり、分母は 25・757・763309・873960180913 と桁がほぼ倍ずつ増え、最後は 25 桁になる。全探索では三項の表し方が 21 通りあり、$1/33+1/121+1/363$ なら最大の分母は 363 で済む。貪欲法の次の分母はいまの分母 d について $d(d-1)$ より大きいので、外れると分母が爆発する——外れ方は、項の数より分母の大きさに出る。分子 4・5 の分数では、ときどき外れる。分離子は、先を見ずに一番大きいものを取るかどうかである。既刊との位置——論文633 の両替では外れても一枚多いだけだったが、ここでは同じ貪欲法が分母を爆発させる。正直に言えば——エルデシュとシュトラウスの予想にも、三項より長い表し方の全探索にも入っていない。

参考文献

1. Sylvester, J. J. (1880). On a point in the theory of vulgar fractions. *American Journal of Mathematics*.
2. 山岸勇輝 (2026).『同じグラフで、繋ぐのは安く、並べるのは高い』[論文348]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22683555
3. 山岸勇輝 (2026).『大きい硬貨から払う両替は、円なら必ず最少枚数だが、旧英貨では 48 ペンスで一枚多くなる』[論文633]. Zenodo. 10.5281/zenodo.23014568

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)