表が続く最長の連は、投げる回数を倍にするごとに一つ伸び、ばらつきは縮まない

— 公正な硬貨を n 回投げたとき、表が続く最長の連の平均は $\log_2 n - 0.667$ ほど — 200 回投げれば、5 回以上続く連は 0.965903 の確率で現れる — [論文636]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

公正な硬貨を n 回投げ、表が続けて出る最長の長さ（最長の連）を数える。その分布を行列の冪で正確に求め、乱数でも確かめる。新しい定理も法則も主張しない。 第一に、200 回投げれば、5 回以上続く連はほぼ必ず現れる——最長の連が 5 以上になる確率は 0.965903、6 以上は 0.800932、7 以上は 0.543708、10 以上でも 0.089919 である。平均は 6.984206 で、乱数 200000 本では 6.983795 だった（第2節）。 第二に、平均は $\log_2 n$ で伸びる——n を 10 倍にするごとの伸びは 3.308277・3.320555・3.321789・3.321917 と $\log_2 10 = 3.321928$ に近づき、倍にするごとに一つ伸びる勘定になる。$n = 10^6$ の平均は 19.264317 で、平均 $-\log_2 n$ は -0.667252、知られた漸近の値 -0.667254 との差は 0.000002 である（第3節）。 第三に、これが本稿の芯である。最長の連のばらつきは、投げる回数を増やしても縮まない——標準偏差は $n = 100$ で 1.793249、10^4 で 1.871193、10^6 で 1.872689 と、漸近の値 1.872711 に近づいて止まる。表の割合の標準偏差 $0.5/\sqrt{n}$ が 0.05 から 0.0005 まで縮むのと対照的である（第4節）。 第四に、分離子は、和を見るか最大を見るかである——表の数（和）は回数を増やすほど割合が落ち着くが、最長の連（最大）は $\log_2 n$ で伸び続け、ばらつきも残る。同じ硬貨の同じ列から、落ち着く量と落ち着かない量が取り出せる（第5節）。 キーワード：最長の連、硬貨投げ、極値統計、ばらつき、対数の伸び。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——最長の連が $\log_2 n$ ほどで伸びること（エルデシュとレーニ、1970）、平均の漸近の値とばらつきの漸近の値、200 回で 5 以上の連がほぼ必ず出ること（シリングの 1990 年の解説ほか）は、いずれも既知である。人がでたらめを書くと連が短すぎる、という心理の話は扱わない——人の書いた列は数えていない。既刊との関係：論文629 は、上限なしのサンクトペテルブルクの賭けで、遊んだ平均の賞金が $\log_2 n$ ほどで伸び続け、落ち着かないことを数えた——ここでも同じ $\log_2 n$ が、最長の連の伸びとして現れる。そしてばらつきも縮まない。加えたのは、分布を行列の冪で正確に求め、$n = 10$ では全 1024 通りの数え上げ、$n = 200$ では乱数と突き合わせたこと、$n = 10$ から 10^6 まで平均とばらつきを並べたこと、分離子を「和か最大か」に置いたことである。

1. 記法と問い

設定：公正な硬貨を n 回投げ、表が続けて出る最長の長さを R_n とする。「いま表が何回続いているか」を状態 $0, 1, \ldots, r-1$ とし、裏なら 0 へ戻り、表なら一つ進み、r に届いたら消える行列を n 回掛けると、生き残る確率が $P(R_n < r)$ である。平均は $\sum_{r \geq 1} P(R_n \geq r)$、二乗の平均は $\sum_{r \geq 1} (2r-1) P(R_n \geq r)$ から求めた。

問い：最長の連は、投げる回数とともにどう伸び、どれだけばらつくか。

2. 200 回投げる

計算 2.1：$n = 200$ の分布を正確に求めた。

最長の連	5 以上	6 以上	7 以上	10 以上
確率	0.965903	0.800932	0.543708	0.089919

平均は 6.984206 である。200 回投げる乱数を 200000 本作ると、平均 6.983795（差 -0.000411、平均の標準誤差 0.004087）、6 以上の割合 0.799390 だった。$n = 10$ の平均は、全 1024 通りを数え上げた値と 10^{-12} 以内で一致した。

> **観察 2.2**
>
> 200 回のうちに表が 5 回続くのは、珍しいことではない。最長の連が 5 に届かない確率は $1 - 0.965903$ にすぎない——長い連は、目を引くが、回数が多ければ現れるのが普通である。

3. 平均の伸び

計算 3.1：n を 10 から 10^6 まで変えて、平均と標準偏差を求めた。

n	平均	標準偏差	平均 $-\log_2 n$
10	2.798828	1.392137	−0.523100
100	5.991780	1.793249	−0.652076
1000	9.300057	1.861224	−0.665727
10^4	12.620612	1.871193	−0.667101
10^5	15.942400	1.872527	−0.667240
10^6	19.264317	**1.872689**	−0.667252

n を 10 倍にするごとの平均の伸びは 3.308277・3.320555・3.321789・3.321917 で、$\log_2 10 = 3.321928$ に近づいた。平均 $-\log_2 n$ の知られた漸近の値 $\gamma/\ln 2 - 3/2 = -0.667254$ とは、$n = 10^6$ で 0.000002 の差だった。

> **観察 3.2**
>
> 最長の連は、投げる回数を倍にするごとに一つ伸びる。長さ r 以上の連が始まる所の数の期待値はおよそ $n/2^{r+1}$ で、これが 1 ほどになる r が $\log_2 n$ の近くにある——回数を倍にすると、一つ長い連にも一度出会えるようになる。

4. ばらつき

計算 4.1：標準偏差は、$n = 10^4$ から 10^6 まで 1.871193・1.872527・1.872689 と変わり、知られた漸近の値 $\sqrt{\pi^2/(6\ln^2 2) + 1/12} = 1.872711$ との差は $n = 10^6$ で 0.000022 だった。比べる量として、表の割合の標準偏差 $0.5/\sqrt{n}$ は、$n = 100$ で 0.050000、10^4 で 0.005000、10^6 で 0.000500 である。

観察 4.2

これが本稿の芯である。最長の連のばらつきは、回数を増やしても縮まない。表の割合は、回数を 100 倍にするごとにばらつきが十分の一になり、1/2 に落ち着く。最長の連は、10^6 回投げても ±1.87 ほどのばらつきが残る——最大は、たまたま長く続いた一か所で決まるので、回数を増やしても平らにならない。

5. 分離子

観察 5.1

分離子は、和を見るか最大を見るかである。同じ硬貨の同じ列から、表の数（和）を取ればばらつきは $1/\sqrt{n}$ で縮み、最長の連（最大）を取ればばらつきは 1.87 のまま残る——「たくさん投げれば落ち着く」は、和の話である。

観察 5.2

論文629 と並べる。629 では、上限なしの賭けで遊んだ平均の賞金が $\log_2 n$ ほどで伸び、落ち着かなかった——ここでも同じ $\log_2 n$ が、最長の連の伸びとして現れる。どちらも、回数とともに出会うまれな長い連が効いている。

観察 5.3

言わないこと。人がでたらめを書くと連が短すぎる、という心理の話は扱わない。人の書いた列は数えていない——示したのは、公正な硬貨の最長の連の正確な分布と、その伸び方とばらつきである。

6. 点呼と結び

1. 200 回で 5 以上は 0.965903（計算 2.1）：ほぼ必ず。
2. 200 回の平均 6.984206（計算 2.1）：乱数と一致。
3. 長い連は普通に現れる（観察 2.2）：目を引くだけ。
4. 10 倍で 3.32 伸びる（計算 3.1）：$\log_2 10$ に近づく。

5. 平均 $-\log_2 n$ は -0.667252（計算 3.1）：漸近の値と 0.000002 差。
6. 倍にするごとに一つ（観察 3.2）：$n/2^{r+1}$ が 1 ほど。
7. 標準偏差 1.872689（計算 4.1）：10^6 回でも。
8. ばらつきは縮まない（観察 4.2）：本稿の芯。
9. 和か最大か（観察 5.1）：分離子。
10. 同じ $\log_2 n$（観察 5.2）：論文629。

結び：公正な硬貨を n 回投げたときの最長の連は、平均が $\log_2 n - 0.667$ ほどで、n を 10 倍にするごとに 3.32 ずつ、倍にするごとに一つ伸びる。200 回投げれば、5 回以上続く連は 0.965903 の確率で現れる。最長の連のばらつきは、10^6 回投げても標準偏差 1.872689 のまま縮まない——表の割合のばらつきが $0.5/\sqrt{n}$ で縮むのと対照的である。分離子は、和を見るか最大を見るかである。既刊との位置——論文629 の賭けで平均を伸ばし続けた $\log_2 n$ が、ここでは最長の連の伸びとして現れる。正直に言えば——人がでたらめを書くときの心理には入っていない。

参考文献

1. Erdős, P., & Rényi, A. (1970). On a new law of large numbers. *Journal d'Analyse Mathématique*.
2. Schilling, M. F. (1990). The longest run of heads. *The College Mathematics Journal*.
3. 山岸勇輝 (2026).『期待値が無限の賭けも、胴元の資金を 10^{12} 円に限れば約 41 円になる』[論文629]. Zenodo. 10.5281/zenodo.23014552

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)