3×3 の魔方陣は中心が 5 で一つだけ、4×4 はどのマスも決まらず 880 ある

— 1 から n^2 を一度ずつ並べ、どの行・列・対角線の和も等しくする — 決まるのは一つのマスではなく、四隅の和と中央の四マスの和（どちらも 34）である — [論文638]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

1 から n^2 までを $n \times n$ のマスに一度ずつ並べ、どの行・列・二本の対角線の和も等しくしたものを魔方陣という（和は 3×3 で 15、4×4 で 34）。計算機で全部を数え、どのマスに何が入りうるかを見る。新しい定理も法則も主張しない。 第一に、3×3 は一つしかない——1 から 9 の全 362880 通りの並べ方を調べると魔方陣は 8 個で、回転と裏返しで同じものをまとめると 1 個だった。中心はいつも 5、四隅は 2・4・6・8、辺の中は 1・3・7・9 に限られる（第2節）。 第二に、これが本稿の芯である。3×3 では、中心を通る四本の線が盤の全マスを覆うので、中心が決まる——真ん中の行・列と二本の対角線の和は $4 \times 15 = 60$ で、これは中心を 4 回、ほかの八マスを 1 回ずつ足したものである。全マスの和は 45 なので、中心は $(60 - 45)/3 = 5$ に決まる。5×5 では、中心を通る四本が覆うのは 25 マスのうち 17 マスだけで、この理屈は働かない（第2節・第4節）。 第三に、4×4 ではどのマスも決まらない——八マスを選ぶと残りが和 34 から決まる後戻り探索で 7040 個、回転と裏返しをまとめて 880 個だった（知られた値と一致）。どのマスにも 1 から 16 のすべてが入りうる。決まるのは、四隅の和と中央の四マスの和で、7040 個すべてで 34 だった（第3節）。 第四に、直交するラテン方陣が無い 6 次にも、魔方陣はある——直交する 4 次のラテン方陣二枚 A・B から $4A + B + 1$ で作った方陣は魔方陣で、7040 個の一覧に入っていた。6 次には直交する相手が無いのでこの作り方は使えないが、行・列・対角線の和がすべて 111 になる 6×6 の魔方陣を一つ確かめた（第4節）。 キーワード：魔方陣、3×3 の魔方陣、4×4 の魔方陣、後戻り探索、完全方陣。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——3×3 の魔方陣が本質的に一つであること、4×4 が回転と裏返しをまとめて 880 個であること（フレニクル、1693）、直交するラテン方陣から魔方陣を作ること（オイラー）は、いずれも既知である。5×5 以上の個数は数えない——5×5 では中心を通る線が盤を覆わないことだけを見る。既刊との関係：論文604 は、6 次のラテン方陣には直交する相手が一つも無いことを示した——直交する二枚から魔方陣を作るオイラーの作り方は 4 次で確かめられたが、6 次では使えない。それでも 6×6 の魔方陣は別の並べ方で存在する。加えたのは、3×3 を全順列、4×4 を後戻り探索で数え、回転と裏返しで閉じていることを確かめたこと、マスごとに入りうる数を数えたこと、分離子を「一つのマスを通る線が盤を覆うか」に置いたことである。

1. 記法と問い

設定：1 から n^2 までを $n\times n$ のマスに一度ずつ並べ、どの行・列・二本の対角線の和も $n(n^2+1)/2$ にする。この和は、3 次で 15、4 次で 34、5 次で 65、6 次で 111 である。

問い：魔方陣はいくつあり、どのマスが決まるか。

2. 3×3

計算 2.1：1 から 9 の全 362880 通りの並べ方を調べた。魔方陣は 8 個で、回転と裏返しで同じものをまとめると 1 個だった。マスごとに入りうる数は、中心 5、四隅 2・4・6・8、辺の中 1・3・7・9 である。

> **観察 2.2**
>
> これが本稿の芯である。3×3 では、中心を通る四本の線が盤の全マスを覆う。中心を c とすると、真ん中の行・列と二本の対角線の和は

$$4\times15=60=(1+2+\cdots+9)+3c=45+3c$$

で、$c=5$ に決まる。四本は中心を 4 回、ほかの八マスを 1 回ずつ覆うので、四本の和が全マスの和と中心だけで書ける——そして中心が 5 の 8 個は、互いに回転と裏返しの違いしかない。

3. 4×4

計算 3.1：一行目の三マス、一列目の二マス、対角線の二マス、二行目の一マスの八マスを選ぶと、残る八マスは行・列・対角線の和 34 から決まる。この後戻り探索で 7040 個が見つかった（6.8 秒）。どれも本当に魔方陣で、重複は無く、回転と裏返しで同じものをまとめると 880 個だった。

計算 3.2：7040 個について、マスごとに入りうる数を数えると、十六マスすべてで 16 種類だった。四隅の和と中央の四マスの和は、7040 個すべてで 34 だった。折れた対角線まですべて 34 になるもの（完全方陣）は 384 個（まとめて 48 個）、中心について向かい合う二マスの和がいつも 17 になるもの（対称方陣）も 384 個（まとめて 48 個）だった。

> **観察 3.3**
>
> 4×4 では、線を足し合わせても一つのマスは決まらず、決まるのは和である。どのマスにも 16 種類が入るので、線をどう足し合わせても、3×3 の中心のように一つのマスが決まることはない——四隅の和と中央の四マスの和は決まるが、その中で何を並べるかは自由に残り、880 通りに広がる。

4. 5 次と 6 次

計算 4.1：5×5 で中心を通る四本の線（真ん中の行・列と二本の対角線）が覆うのは、25 マスのうち 17 マスだった。四本の和を全マスの和と中心だけで書くことはできない。

計算 4.2：直交する 4 次のラテン方陣二枚 A・B から $4A + B + 1$ で作った方陣は、次のとおりで、魔方陣であり、7040 個の一覧に入っていた。

1	6	11	16
12	15	2	5
14	9	8	3
7	4	13	10

計算 4.3：次の 6×6 は、1 から 36 を一度ずつ使い、行・列・対角線の和がすべて 111 だった。

35	1	6	26	19	24
3	32	7	21	23	25
31	9	2	22	27	20
8	28	33	17	10	15
30	5	34	12	14	16
4	36	29	13	18	11

観察 4.4

作り方が無いことと、ものが無いことは別である。6 次には直交するラテン方陣が無く、それを重ねる作り方は使えない。それでも 6×6 の魔方陣は、別の並べ方で存在する——一つの作り方の限界は、作られるものの限界ではない。

5. 分離子

観察 5.1

分離子は、一つのマスを通る線が盤を覆うかどうかである。3×3 では中心を通る四本が全マスを覆い、中心が 5 に決まり、並べ方は一つに絞られる。4×4 では一つのマスを決める線の組が無く、決まるのは和だけで、並べ方は 880 ある。5×5 では中心を通る四本が 17 マスしか覆わない——同じ「和を等しくする」でも、線の重なり方が、何が決まるかを決める。

観察 5.2

論文604 と並べる。604 は、6 次のラテン方陣には直交する相手が一つも無いことを示した——ここでは、直交する二枚から魔方陣を作る作り方を 4 次で確かめ、6 次ではその作り方が使えなくても魔方陣自体はあることを一例で示した。

> **観察 5.3**
>
> 言わないこと。5×5 以上の魔方陣の個数は数えない。6×6 の作り方の一般論にも入らない——示したのは、3×3 と 4×4 の全数、マスごとに入りうる数、線の覆い方の違いである。

6. 点呼と結び

1. 3×3 は 8 個、まとめて 1 個（計算 2.1）：全順列で。
2. 中心はいつも 5（計算 2.1）：四隅は偶数、辺は奇数。
3. 中心を通る四本が全マスを覆う（観察 2.2）：本稿の芯。
4. 4×4 は 7040 個、まとめて 880 個（計算 3.1）：後戻り探索。
5. どのマスにも 16 種類（計算 3.2）：一つも決まらない。
6. 四隅と中央の四マスの和は 34（計算 3.2）：決まるのは和。
7. 完全方陣と対称方陣は 384 個ずつ（計算 3.2）：まとめて 48 個ずつ。
8. 5×5 の四本は 17 マス（計算 4.1）：覆わない。
9. 6×6 の魔方陣はある（計算 4.3）：和 111。
10. 作り方の限界はものの限界ではない（観察 4.4）：論文604。

結び：1 から 9 を並べる 3×3 の魔方陣は、全 362880 通りのうち 8 個、回転と裏返しをまとめて 1 個しかなく、中心はいつも 5 である。中心を通る四本の線が盤の全マスを覆うので、$4 \times 15 = 45 + 3c$ から中心が 5 に決まる。4×4 は 7040 個、まとめて 880 個で、どのマスにも 1 から 16 のすべてが入りうる——決まるのは一つのマスではなく、四隅の和と中央の四マスの和である。分離子は、一つのマスを通る線が盤を覆うかどうかである。既刊との位置——論文604 の「直交する相手が無い」6 次でも、魔方陣は別の並べ方で存在する。正直に言えば——5×5 以上の個数にも、6×6 の作り方の一般論にも入っていない。

参考文献

1. Euler, L. (1782). Recherches sur une nouvelle espèce de quarrés magiques. *Verhandelingen uitgegeven door het zeeuwsch Genootschap der Wetenschappen te Vlissingen*.
2. 山岸勇輝 (2026).『6 次のラテン方陣には、直交する相手が一つも無い』[論文604]. Zenodo. 10.5281/zenodo.23014438

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)