

特別な次元の分布定理

— なぜ単一の「魔法の次元」が存在しないのか —

論文58の関数比較法の拡張

著者: 山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

所属: Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

投稿区分: 論文64 (Paper 64) | Zenodo: 10.5281/zenodo.21616221

Category: 数理物理学 / 次元論 / 構造的解釈

キーワード: 次元性, 人間原理, 関数比較, 重力自由度, ホイヘンスの原理, 単位球体積

— From thinking to syncing. —

本稿の位置づけ

本稿は確立した数学的事実の構造的解釈と体系的整理を提示するものであり、新たな物理法則の発見も、我々の宇宙が **3+1** 次元でなければならないという証明も主張しない。新規性は組織化にある——論文58の関数比較法を複数の次元依存基準に適用し、それらの最適点が単一の次元に集中せず分布することを記録する。既存理論と矛盾する主張は含まない。

概要

「なぜ **3+1** 次元なのか」という問いは、通常、単一の決定的理由を探すものとして立てられる。本稿は体系的な表化によって、すべての基準で最適となる単一の次元は存在せず、次元の「特別さ」はむしろ近傍 **{3,4,5}** に分布し、物理的な値の周りに集中することを論じる。論文58の関数比較法（「基準を孤立した値ではなく d の関数として比較せよ」）を六つの独立で確立された基準に適用する：(1) 軌道と原子の安定性、(2) 鋭い波動伝播（ホイヘンス）、(3) 伝播する重力自由度 $N(D) = D(D-3)/2$ の発生、(4) トレース反転因子 $f_{GR}(D) = (D-2)/(D-3)$ と階段因子 **2** の $D=4$ における唯一の交差（論文58）、(5) 位相的特異性（エキゾチック $\mathbb{R}^4$ 、Hopf）、(6) 単位球体積の $n=5$ での最大（論文59）。安定性は $d=3$ を、重力的・位相的な豊かさは $D=4$ を、体積容量は $d=5$ を選ぶ。これを分布観察として述べ、人間原理の精密化として読む：**3+1** が特別なのは、一つの条件がそれを強制するからではなく、複数の独立な最適点が同じ狭い帯域に集中するからである。これは基準の選択に「集中」が依存する整理であって、**3+1** の必然性を確立するものではない。

§1. 序論

Ehrenfest (1917) 以来、物理空間がなぜ3次元かという問いは、 $d = 3$ でのみ成り立つ性質を提示することで扱われてきた。そのような論証はいずれも一つの基準を特定する。暗黙の期待は、いずれ一つの基準が決定的な理由だと判明することにある。

本稿は逆の立場をとる。論文58の方法——アインシュタイン側の因子2 $f_{\text{GR}}(D) = (D - 2)/(D - 3)$ と階段側の因子2 $f_{\text{ladder}} = 2$ を D の関数として比較し、 $D = 4$ でのみ一致すると判定した——に従い、複数の次元依存基準を関数として比較し、各々がどこで最適化されるかを記録する。結論は、それらが異なる次元で最適化され、いずれも小さな帯域 $\{3, 4, 5\}$ に収まる、というものである。

本稿が行わないこと。時空が4次元でなければならないことの証明も、新法則の追加も行わない。既知の事実を単一の方法の下に整理し、一つの構造的結論——特別さは分布する——を引き出すのみである。

§2. 関数比較法（再掲）

論文01・58から継承する方法：ある性質が特定の引数に固有かを問うには、孤立した数値ではなく、量を関数として比較し、どの引数で交差・退化・極値をとるかを問え。論文01は r^α が定数になるのは $\alpha = 0$ のみと問うた。論文58は $f_{\text{GR}}(D) = f_{\text{ladder}}(D)$ が $D = 4$ のみと問うた。本稿は同じレンズを基準の族に同時適用する。

§3. 次元の関数としての六基準

以下、特記なき限り d は空間次元。重力量は時空次元 $D = d + 1$ を用いる。

3.1 軌道と原子の安定性（ $d = 3$ を選ぶ）

束保存則に対応する中心力べき $F \propto r^{-(d-1)}$ に対し、有界で安定な軌道は $d \leq 3$ でのみ存在し、閉じた安定軌道は厳密に $d = 3$ のみ（Bertrand 1873; Ehrenfest 1917）。 $d \geq 4$ では有効ポテンシャルが安定な極小を持たず、惑星軌道も水素原子も不安定。最適： $d = 3$ 。

3.2 鋭い波動伝播（奇数 d 、最小で $d = 3$ ）

ホイヘンスの原理の厳密な形（反響する裾のない鋭い波面）は、波動方程式に対して奇数空間次元 $d \geq 3$ でのみ成り立つ。偶数次元では信号が反響する。非自明な場合のうち $d = 3$ が最小の清潔な場合。最適：奇数 d 、最小で $d = 3$ 。

3.3 伝播する重力の発生（時空 $D \geq 4$ ）

D 次元時空の伝播する重力子自由度は

$$N(D) = \frac{D(D-3)}{2}$$

$N(3) = 0$ 、 $N(4) = 2$ 、 $N(5) = 5$ ：重力は $D \leq 3$ で局所自由度を持たず、 $D = 4$ で初めて「点火」する。発生： $D = 4$ (3+1)。

3.4 トレース反転因子とその唯一の交差 ($D = 4$)

$$f_{\text{GR}}(D) = \frac{D-2}{D-3}, \quad f_{\text{ladder}} = 2$$

関数として比較すると $f_{\text{GR}}(D) = 2 \iff D = 4$ ：唯一の交差。さらに $f_{\text{GR}}(2) = 0$ (2D重力は位相的)、 $f_{\text{GR}}(3) = \infty$ (2+1 重力に局所自由度なし)、 $f_{\text{GR}}(D) \rightarrow 1$ ($D \rightarrow \infty$)。最適/交差： $D = 4$ 。

3.5 位相的特異性 ($d = 4$)

$\mathbb{R}^4$ は非可算個のエキゾチック微分構造を持ち ($d = 4$ に固有)、4次元は第2チャーン類/インスタントン数 $k = \frac{1}{16\pi^2} \int \text{tr}(F \wedge F)$ を、 $S^3 \rightarrow S^2$ を通じて Hopf 不変量を宿す。最適： $d = 4$ 。

3.6 単位球の体積容量 ($d = 5$)

$$V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)}$$

は $n = 5$ で最大 ($V_5 = \frac{8\pi^2}{15} \approx 5.264 > V_6 \approx 5.168 > V_4 \approx 4.935$)；論文59。最適： $d = 5$ 。

§4. 一覧表

d (空間)	選ぶ基準	状態
2	—	重力が自明 ($f_{\text{GR}} = 0$) ; 体積小さい
3	安定性・鋭い波	軌道/原子が安定 ; ホイヘンス鋭い ; 重力が点火寸前
4	重力自由度・因子2の交差・位相	重力子が伝播 ($D=4$ で $N=2$) ; エキゾチック $\mathbb{R}^4$; インスタントン/Hopf ; 唯一の $f_{\text{GR}} = f_{\text{ladder}}$
5	体積容量	単位球体積が最大 ; 軌道はすでに不安定
6	—	体積が減少 ; 不安定性増大
7	—	体積さらに減少

拡張トレース反転表 (論文58の観察から発展) :

D (時空)	$f_{\text{GR}} = \frac{D-2}{D-3}$	意味
2	0	アインシュタインテンソルが自明 (2D重力は位相的)
3	∞ (極)	2+1 重力に局所自由度なし
4	2	我々の宇宙 ; $f_{\text{ladder}} = 2$ との唯一の交差
5	$3/2$	
6	$4/3$	
∞	$\rightarrow 1$	トレース反転が恒等変換に漸近

注 : $f_{\text{GR}}(D) = 1$ は有限解を持たず、 $f_{\text{GR}}(D) = 2$ は $D = 4$ のみ。

§5. 分布観察

観察 5.1（特別さの分布）

第3節の六基準に対し、最適化する次元は一意でない。安定性と鋭い伝播は $d = 3$ 、伝播する重力・因子2の交差・位相的特異性は $D = 4$ 、体積容量は $d = 5$ を選ぶ。すべての最適点は帯域 $\{3, 4, 5\}$ に収まり、物理的次元の周りに集中する。

系 5.2（人間原理的読みの精密化）

$3+1$ の特別さは、単一条件の帰結というより複数の独立な最適点の集中として記述する方が適切である。宇宙が $3+1$ であるのは、一つの基準が他を禁じるからではなく、互いに無関係な複数の基準が同じ狭い帯域で近似的に最適だからである。

これは強い意味の定理ではなく観察として提示する：どの基準を含めるかはモデル化の選択であり、別の一覧なら帯域が動きうる。頑健なのは定性的言明——単一の次元が列挙したすべての基準を最適化することはない——であり、これは一覧表の各行が明示している。

§6. 主張の射程

確立されたこと

1. 各基準は明確な最適次元を持つ既知の数学的事実であり、最適点はそれぞれ $3, 3, 4, 4, 4, 5$ 。
2. 単一の次元が六基準すべてを最適化することはない（観察5.1）。
3. $f_{\text{GR}} = 1$ は有限解を持たず、 $f_{\text{GR}} = f_{\text{ladder}}$ は $D = 4$ のみ。

確立されていないこと／未解決問題

- ・時空が4次元でなければならないこと。この整理は記述的であって必然性の証明ではない。
- ・「集中」が基準に依存しないこと。基準の増減で帯域は動きうる。
- ・新たな物理法則（各行は確立された結果を引用）。
- ・未解決：**{3,4,5}** が「特別な」次元の最も密な帯域であることを可証的に示す、基準に依存しない尺度は存在するか？ それがない限り系5.2は定理でなく解釈にとどまる。

§7. 結論

論文58の関数比較法を六つの確立された基準に適用すると、特別な次元は分布する——安定性と波の鋭さは $d = 3$ 、重力の伝播・因子2の交差・位相は $D = 4$ 、体積容量は $d = 5$ ——そして物理的な値の周りに集中する。これを人間原理の精密化として読む：**3+1** は単一の原因によってではなく、独立な最適点の集中によって特別である。主張は組織的・記述的であり、**3+1** の必然性を確立するものではない。

参考文献

1. Ehrenfest, P. (1917). *In what way does it become manifest in the fundamental laws of physics that space has three dimensions?* Proc. Amsterdam Acad., 20, 200–209.
2. Bertrand, J. (1873). *Théorème relatif au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe*. C. R. Acad. Sci., 77, 849–853.
3. Courant, R. & Hilbert, D. (1962). *Methods of Mathematical Physics, Vol. II*. Interscience. (奇数次元でのホイヘンスの原理。)
4. Tegmark, M. (1997). *On the dimensionality of spacetime*. Class. Quantum Grav., 14, L69–L75.
5. Deser, S., Jackiw, R. & 't Hooft, G. (1984). *Three-dimensional Einstein gravity*. Ann. Phys., 152, 220–235.
6. Donaldson, S. K. (1983). *An application of gauge theory to four-dimensional topology*. J. Diff. Geom., 18, 279–315.
7. [Yamagishi 2026, Paper 01] Y. Yamagishi, *The Uniqueness Theorem of $n=2$* . Zenodo. [10.5281/zenodo.21403186](https://zenodo.org/record/21403186)
8. [Yamagishi 2026, Paper 58] Y. Yamagishi, *The Factor Two as a Distinct Root*. Zenodo. [10.5281/zenodo.21597747](https://zenodo.org/record/21597747)
9. [Yamagishi 2026, Paper 59] Y. Yamagishi, *The Unit-Ball Volume Peaks in Five Dimensions*. Zenodo. [10.5281/zenodo.21597865](https://zenodo.org/record/21597865)
10. [Yamagishi 2026, Paper 57] Y. Yamagishi, *The Kaluza–Klein Re-entry*. Zenodo. [10.5281/zenodo.21597608](https://zenodo.org/record/21597608)

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)