偶数を二つの素数の和に表す仕方の数は、3 で割り切れるかでおよそ 2 倍違う

— 4 から 1000000 までのどの偶数も、二つの素数の和に表せた — 5 で割り切れると 1.333126 倍、7 で割り切れると 1.199996 倍で、どれも $(p-1)/(p-2)$ に近い — [論文640]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan｜山岸勇輝ラボ
2026年9月

— From thinking to syncing. —

要旨

偶数 n を二つの素数の和 $p+q$（$p \le q$）に表す仕方の数 $r(n)$ を、100 万まですべて数える。どの偶数も表せるか（ゴールドバッハ予想）は証明しない。表し方の数が何で増えたり減ったりするかを見る。新しい定理も法則も主張しない。 第一に、100 万までのどの偶数も表せた——4 から 1000000 までの偶数で表し方が 0 のものは無く、1 通りだけなのは 4・6・8・12 だった。表し方の数は 100 で 6、10000 で 127、1000000 で 5402 である。畳み込みで数えた値は、310 個の偶数で直接の数えと一致した（第2節）。 第二に、これが本稿の芯である。表し方の数は、n を割り切る小さな素数で決まった倍率だけ増える——90 万から 100 万の偶数で、3 で割り切れるものの平均は割り切れないものの 1.999939 倍だった。3 で割り切れないものの中で 5 で割り切れると 1.333126 倍、3 と 5 で割り切れないものの中で 7 で割り切れると 1.199996 倍で、どれも $(p-1)/(p-2)$（2・4/3・6/5）に近い（第3節）。 第三に、倍率は、割り算の余りを数えるだけで出る——3 で割り切れない n では、素数 q の半分で $n-q$ が 3 の倍数になって素数になれない。3 で割り切れる n では、そうなる q が無い。だから 3 で割り切れる n は、およそ 2 倍の組を持つ（第3節）。 第四に、予想の式とよく合う——この倍率を入れたハーディとリトルウッドの予想の式と比べると、90 万から 100 万の 500 個で、実際の数との比は平均 0.997559（0.976919 から 1.013639）だった。1000000 では、実際の 5402 に対して式は 5417.08 である（第4節）。 キーワード：ゴールドバッハ予想、素数の和、表し方の数、ハーディ＝リトルウッド予想、特異級数。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——ゴールドバッハ予想（1742 年のオイラーへの手紙）、表し方の数の予想の式とその倍率（ハーディとリトルウッド、1923）、予想がはるかに大きな数まで計算で確かめられていること（オリヴェイラ・エ・シルヴァほか、2014）は、いずれも既知である。予想を証明しない——100 万まで数えただけで、どれだけ数えても証明にはならない。予想の式は、予想として比べるだけである。既刊との関係：論文621 は、コラッツの操作で 10^6 までのどの数も 1 に着くことを確かめたが、証明ではなかった——ここでもゴールドバッハを 10^6 まで確かめるだけである。論文513 は、格子点を数えるという操作が平方剰余の相互法則を証明してしまうことを示した——ここでは数えることは証明にならないが、その代わり、表し方の数が小さな素数の余りで決まる倍率を持つことを数える。加えたのは、表し方の数を畳み込みと直接の数えの二つで出したこと、$3 \cdot 5 \cdot 7$ の倍率を、ほかの素数の影響を除いた組で測ったこと、分離子を「n を割り切る小さな素数」に置いたことである。

1. 記法と問い

設定：偶数 n について、$n = p + q$、$p \le q$ で $p \cdot q$ がどちらも素数となる組の数を $r(n)$ とする。100 万までの素数を篩で求め、素数の印の列を自分自身と畳み込む（高速フーリエ変換）ことで、すべての n の $r(n)$ を一度に数えた。

問い：表し方の数は、何で増えたり減ったりするか。

2. 100 万まで

計算 2.1：100 万までの素数は 78498 個である。畳み込みで数えた $r(n)$ は、無作為に選んだ 300 個と代表の 10 個、合わせて 310 個の偶数で、直接の数えと一致した。

n	4	100	1000	10000	100000	1000000
$r(n)$	1	6	28	127	810	5402

4 から 1000000 までの偶数で、$r(n) = 0$ のものは無かった。$r(n) = 1$ は $4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 12$ だけである。$n - p$ も素数になる一番小さい素数 p が最も大きくなるのは、$n = 503222$ の $p = 523$ だった。

観察 2.2

100 万まで、どの偶数も二つの素数の和に表せた。しかも表し方の数は、表のとおり n とともに増えていく——それでも、これは予想の証明ではない。数えた範囲の外について、何も言っていない。

3. 3・5・7 で割り切れるか

計算 3.1：90 万から 100 万の偶数で、表し方の数の平均を比べた。5 の倍率は 3 で割り切れないものの中で、7 の倍率は 3 と 5 で割り切れないものの中で比べ、先の素数の影響を除いた。

割り切る素数	平均の比	$(p-1)/(p-2)$	差
3	**1.999939**	2	−0.000061
5	1.333126	1.333333	−0.000207
7	1.199996	1.200000	−0.000004

> **観察 3.2**
>
> これが本稿の芯である。倍率は、割り算の余りを数えるだけで出る。3 より大きい素数 q は、3 で割って 1 余るか 2 余るかのどちらかである。n が 3 で割り切れないとき、q の半分では $n-q$ が 3 で割り切れ、素数になれない。n が 3 で割り切れるときは、$n-q$ はいつも 3 で割り切れない——だから 3 で割り切れる n は、およそ 2 倍の組を持つ。5 では q の四つの余りのうち一つが消えるかどうかで 4/3、7 では六つのうち一つで 6/5 になる。

4. 予想の式と比べる

計算 4.1：ハーディとリトルウッドの予想の式

$$r(n) \approx C_2 \prod_{p \mid n,\, p>2} \frac{p-1}{p-2} \int_2^{n-2} \frac{dt}{\ln t \, \ln(n-t)}$$

（C_2 は双子素数の定数）と、90 万から 100 万の偶数から等間隔に選んだ 500 個で比べた。実際の数との比は、平均 0.997559、最小 0.976919、最大 1.013639 だった。1000000 では、実際の 5402 に対して式は 5417.08 である。

> **観察 4.2**
>
> 予想の式は、小さな素数の倍率を掛けることで、表し方の数のばらつきをよく写す。表し方の数を n に対して並べると、割り切る小さな素数ごとに帯に分かれる（ゴールドバッハの彗星）——割り切る素数で分けた組どうしの平均の比が、計算 3.1 の $(p-1)/(p-2)$ に近い倍率だった。

5. 分離子

観察 5.1

分離子は、n を割り切る小さな素数である。同じ大きさの偶数でも、3 で割り切れれば表し方はおよそ 2 倍、5 でさらに 4/3 倍、7 でさらに 6/5 倍になる——表し方の数を決めているのは、n の大きさだけでなく、n の約数の顔ぶれである。

観察 5.2

論文621 と論文513 と並べる。621 は、コラッツの操作を 10^6 まで確かめたが、証明ではなかった。513 では、格子点を数えることが平方剰余の相互法則を証明した——ここでは、数えることは予想を証明しない。その代わり、数えると、表し方の数が割り算の余りで決まる倍率を持つことが見える。

観察 5.3

言わないこと。ゴールドバッハ予想を証明しない。予想の式も、予想として比べるだけで導かない——示したのは、100 万までの表し方の数と、小さな素数での倍率である。

6. 点呼と結び

1. 100 万までどの偶数も表せる（計算 2.1）：0 通りは無い。
2. 1 通りだけは 4・6・8・12（計算 2.1）：それより先は二通り以上。
3. $r(1000000) = 5402$（計算 2.1）：二つの数え方が一致。
4. 最も大きい一番小さい素数は 523（計算 2.1）：$n = 503222$。
5. 数えても証明ではない（観察 2.2）：範囲の外は言わない。
6. 3 で割り切れると 1.999939 倍（計算 3.1）：2 に近い。
7. 5 で 1.333126 倍、7 で 1.199996 倍（計算 3.1）：4/3・6/5。
8. 余りを数えるだけで倍率が出る（観察 3.2）：本稿の芯。
9. 予想の式との比は平均 0.997559（計算 4.1）：500 個で。
10. 数えることは証明にならない側（観察 5.2）：論文621・論文513。

結び：4 から 1000000 までのどの偶数も二つの素数の和に表せ、1 通りだけなのは 4・6・8・12 だった。表し方の数は、n を割り切る小さな素数で決まった倍率だけ増え、90 万から 100 万では 3 で割り切れると 1.999939 倍、5 で 1.333126 倍、7 で 1.199996 倍だった——割り算の余りを数えるだけで、$(p-1)/(p-2)$ の倍率が出る。その倍率を入れた予想の式は、実際の数と平均 0.997559 の比で合う。分離子は、n を割り切る小さな素数である。既刊との位置——論文621 と同じく 10^6 まで確かめただけで、論文513 と違って、数えることは証明にならない。正直に言えば——ゴールドバッハ予想の証明にも、予想の式の導出にも入っていない。

参考文献

1. Hardy, G. H., & Littlewood, J. E. (1923). Some problems of ‘Partitio numerorum’; III: On the expression of a number as a sum of primes. *Acta Mathematica*.
2. Oliveira e Silva, T., Herzog, S., & Pardi, S. (2014). Empirical verification of the even Goldbach conjecture and computation of prime gaps up to $4 \cdot 10^{18}$. *Mathematics of Computation*.
3. 山岸勇輝 (2026).『数えるという操作が、代数の定理を証明してしまう』[論文513]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22862214
4. 山岸勇輝 (2026).『コラッツの操作は平均して縮むが、3 を 5 に替えると平均して伸びる』[論文621]. Zenodo. 10.5281/zenodo.23014516

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)