

Die ABC-Vermutung ist für Polynome ein Satz und für ganze Zahlen eine Vermutung: den ganzen Zahlen fehlt die Ableitung

— für Polynome übersteigt **max deg** nie die Anzahl der verschiedenen Nullstellen minus **1** (der Satz von Mason–Stothers), also scheitert dieselbe Ungleichung nie — ihr Beweis nutzt, dass die Wronski-Determinante $ab' - a'b$ durch den wiederholten Anteil der Nullstellen teilbar ist, und ganze Zahlen haben keine solche Ableitung — [Aufsatz 641]

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)
Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan
September 2026

— *From thinking to syncing.* —

Zusammenfassung

Für teilerfremde positive ganze Zahlen $a + b = c$ schreibe $\text{rad}(abc)$ für das Produkt der verschiedenen Primzahlen, die abc teilen, und definiere die Qualität $q = \log c / \log \text{rad}(abc)$. Die ABC-Vermutung besagt, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ nur endlich viele Tripel mit $q > 1 + \varepsilon$ gibt. Dieselbe Frage lässt sich für Polynome stellen, wo sie ein Satz ist. Dieser Aufsatz beweist nichts; er zählt beides und stellt es nebeneinander. Es wird kein neuer Satz und kein neues Gesetz beansprucht.

Erstens, unter den ganzen Zahlen gibt es Tripel mit $q > 1$ ——Tripel mit $q > 1$ gibt es 6 mit $c < 10^2$, 31 mit 10^3 , 120 mit 10^4 , 418 mit 10^5 und 1268 mit 10^6 . Unter den 151895 teilerfremden Tripeln mit $c < 10^8$ sind es 31, ein Anteil von 0.000204 (Abschnitt 2).

Zweitens, Tripel weit über 1 sind selten——von den 1268 Tripeln mit $c < 10^6$ haben 102 ein $q > 1.2$, 11 ein $q > 1.4$ und nur 2 ein $q > 1.5$; das höchste ist $1 + 4374 = 4375$ mit 1.567887. Das für die höchste Qualität bekannte Tripel, $2 + 3^{10} \times 109 = 23^5$, hat 1.629912. Die Familie $1 + (3^{2^k} - 1) = 3^{2^k}$ behält $q > 1$ für $k = 1$ bis 6, nähert sich aber 1, von 1.292030 bei $k = 2$ bis 1.056393 bei $k = 6$ (Abschnitt 3).

Drittens, und das ist der Kern. Für Polynome scheitert dieselbe Ungleichung nie——für teilerfremde Polynome $a + b = c$ übersteigt $\max \deg$ nicht die Anzahl der verschiedenen Nullstellen von abc minus 1 (der Satz von Mason–Stothers). Diese Ungleichung, das Gegenstück zu $\log c \leq \log \text{rad}(abc)$ für ganze Zahlen, scheiterte nie in 600 Tripeln, die so gebaut waren, dass sie wiederholte Nullstellen haben, und die Familie $a = x^n$, $c = (x + 1)^n$ erreichte die Gleichheit für $n = 2$ bis 8 (Abschnitt 4).

Viertens, der Beweis für Polynome benutzt die Ableitung, und ganze Zahlen haben keine solche Ableitung——die Wronski-Determinante $W = ab' - a'b$ ist nicht 0 und ist $m - 1$ -mal durch jede mit dem Gewicht m wiederholte Nullstelle teilbar. In allen 600 Tripeln war W durch $abc/\text{rad}(abc)$ teilbar. Dieser Schritt liefert die Ungleichung für Polynome. Ganze Zahlen haben nichts, was a' entspricht, und der Schritt überträgt sich nicht (Abschnitt 5).

Schlüsselwörter: abc-Vermutung, Radikal, Satz von Mason-Stothers, Polynome, Wronski-Determinante.

Tragweite (scope note): Es wird kein neuer Satz und kein neues Gesetz beansprucht——die ABC-Vermutung (Masser und Oesterlé, um 1985), der Satz für Polynome (Stothers 1981, Mason 1984), das für die höchste Qualität bekannte Tripel $2 + 3^{10} \times 109 = 23^5$ und Zählungen von Tripeln mit $q > 1$ sind alle bekannt. Die ABC-Vermutung wird nicht bewiesen——gezählt werden nur Tripel bis $c < 10^6$, und Zählen ist kein Beweis. Die Stichhaltigkeit von Mochizukis behauptetem Beweis (2012) wird nicht erörtert——es wird nur festgehalten, dass er in der mathematischen Gemeinschaft nicht allgemein anerkannt ist. Es wird nicht gesagt, „mit einer Ableitung wäre der Fall der ganzen Zahlen gelöst“——gezeigt wird nur, welcher Schritt des Beweises für Polynome sich nicht auf ganze Zahlen überträgt. Beziehung zu früheren Aufsätzen: Aufsatz 236 maß die Dimension der Lösungsmenge einer Differentialgleichung mit der Wronski-Determinante——hier zählt dieselbe Wronski-Determinante die wiederholten Nullstellen von Polynomen. Aufsatz 640 zählte, dass die Anzahl der Weisen, eine gerade Zahl als Summe zweier Primzahlen zu schreiben, Faktoren trägt, die durch die Division durch kleine Primzahlen festgelegt sind, und hielt fest, dass Zählen kein Beweis ist——auch hier wird das Zusammentreffen einer Addition $a + b = c$ mit der multiplikativen Struktur $\text{rad}(abc)$ gezählt. Hinzugefügt wird, ganzzahlige Tripel bis 10^6 zu zählen und dabei drei Zählweisen abzugleichen, die Ungleichung für Polynome und die Teilbarkeit der Wronski-Determinante an zufälligen Tripeln zu prüfen, und den Separator darauf zu legen, ob es eine Ableitung gibt.

1. Bezeichnungen und Frage

Ganze Zahlen: für teilerfremde positive ganze Zahlen $a < b$ und $c = a + b$ sei $\text{rad}(abc)$ das Produkt der verschiedenen Primzahlen, die abc teilen, und man definiere die Qualität

$$q = \frac{\log c}{\log \text{rad}(abc)}.$$

$q > 1$ bedeutet $c > \text{rad}(abc)$. Die ABC-Vermutung besagt, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ nur endlich viele Tripel mit $q > 1 + \varepsilon$ gibt.

Polynome: für teilerfremde Polynome mit komplexen Koeffizienten $a + b = c$ (nicht alle konstant) sei $n_0(abc)$ die Anzahl der verschiedenen Nullstellen von abc . Der Grad entspricht dem ganzzahligen $\log c$, und $n_0(abc)$ entspricht $\log \text{rad}(abc)$.

Frage: warum ist dieselbe Frage für Polynome ein Satz und für ganze Zahlen noch eine Vermutung? Der Unterschied wird in Zahlen betrachtet.

2. Ganzzahlige Tripel zählen

Rechnung 2.1: Tripel wurden durch erschöpfende Suche für $c < 2000$ gezählt, durch eine Zählung, die die Kandidaten mit $\text{rad}(a) \text{rad}(b) \text{rad}(c) < c$ einengt, bis $c < 10^5$, und durch eine schnellere Fassung derselben

Einengung bis $c < 10^6$; auf jeder Stufe ergaben die beiden Zählungen genau dieselben Tripel.

Bereich von c	$< 10^2$	$< 10^3$	$< 10^4$	$< 10^5$	$< 10^6$
Tripel mit $q > 1$	6	31	120	418	1268

Die 6 Tripel mit $c < 100$ sind $1 + 8 = 9$, $1 + 48 = 49$, $1 + 63 = 64$, $1 + 80 = 81$, $5 + 27 = 32$ und $32 + 49 = 81$. Von allen 1501 teilerfremden Tripeln mit $c < 100$ haben 6 ein $q > 1$ (ein Anteil von 0.003997); mit $c < 10^3$ sind es 31 von 151895 (ein Anteil von 0.000204).

Beobachtung 2.2: Tripel mit $q > 1$ existieren, aber sie sind selten. In jedem von ihnen enthält eine der Zahlen a, b, c dieselbe Primzahl viele Male——damit c größer als $\text{rad}(abc)$ wird, müssen sich Primzahlen wiederholen.

3. Tripel hoher Qualität

Rechnung 3.1: die 1268 Tripel mit $c < 10^6$ wurden nach Qualität geordnet.

Tripel	$\text{rad}(abc)$	q
$1 + 4374 = 4375$	210	1.567887
$343 + 59049 = 59392$	1218	1.547075
$121 + 255879 = 256000$	4290	1.488865
$37 + 32768 = 32805$	1110	1.482910
$1 + 2400 = 2401$	210	1.455673

Tripel mit q über 1.1, 1.2, 1.3, 1.4 und 1.5 gibt es 379, 102, 29, 11 und 2.

Rechnung 3.2: das für die höchste Qualität bekannte Tripel, $2 + 3^{10} \times 109 = 23^5$ ($2 + 6436341 = 6436343$), wurde geprüft. Es ist teilerfremd, mit $\text{rad}(abc) = 15042$, $\log c = 15.677471$ und $\log \text{rad}(abc) = 9.618602$, was $q = \mathbf{1.629912}$ ergibt.

Rechnung 3.3: in $1 + (3^{2^k} - 1) = 3^{2^k}$ ist $3^{2^k} - 1$ durch 2^{k+2} teilbar, sodass $\text{rad}(abc)$ unter c fällt. Da $3^{2^{k+1}} - 1 = (3^{2^k} - 1)(3^{2^k} + 1)$ und der zweite Faktor gerade ist, wächst die Potenz von 2 mit jedem Schritt in k um mindestens eins, und die Familie setzt sich ohne Ende fort. Die Teilbarkeit wurde für $k = 1$ bis 6 geprüft.

k	1	2	3	4	5	6
q	1.226294	1.292030	1.235303	1.155623	1.095349	1.056393

Beobachtung 3.4: es gibt unendlich viele Tripel mit $q > 1$, doch die Qualität dieser Familie nähert sich 1. Was die ABC-Vermutung endlich nennt, ist die Menge mit $q > 1 + \varepsilon$, nicht die Menge mit $q > 1$ —der Gehalt der Vermutung ist nicht das Überschreiten von 1, sondern dass das Überschreiten von 1 um einen festen Abstand nicht ewig weitergehen kann.

4. Polynome

Rechnung 4.1: a und b wurden aus Potenzen kleiner Polynome gebaut, sodass sie wiederholte Nullstellen haben, mit $c = a + b$, und 600 teilerfremde Tripel wurden zufällig erzeugt. In jedem Tripel galt $\max \deg \leq n_0(abc) - 1$; der kleinste Wert von $(n_0(abc) - 1) - \max \deg$ war 1, und der größte von $\max \deg / (n_0(abc) - 1)$ war 0.875000.

Rechnung 4.2: mit $a = x^n$, $c = (x + 1)^n$ und $b = c - a$ ist $n_0(abc) = n + 1$ für $n = 2$ bis 8, womit die Gleichheit $\max \deg = n_0(abc) - 1$ erreicht wird.

Beobachtung 4.3: das ist der Kern: Die Ungleichung, die für ganze Zahlen scheitert, scheitert für Polynome nie. Für ganze Zahlen scheiterte $\log c \leq \log \text{rad}(abc)$ 1268-mal mit $c < 10^6$. Dieselbe Ungleichung für Polynome, $\max \deg \leq n_0(abc) - 1$, scheiterte in 600 Tripeln nie; sie erreichte die Gleichheit, überschritt sie aber nie—was für ganze Zahlen eine Vermutung bleibt, ist für Polynome ein Satz, der nicht einmal den Abstand ε braucht.

5. Der entscheidende Schritt: die Wronski-Determinante

Beobachtung 5.1: der Beweis für Polynome benutzt die Wronski-Determinante

$$W = ab' - a'b = ac' - a'c$$

(die beiden Formen stimmen überein, weil $c = a + b$). Hat a eine Nullstelle x_0 mit dem Gewicht m , so sind a und a' beide durch $(x - x_0)^{m-1}$ teilbar, und ebenso W . Dasselbe gilt für die Nullstellen von b aus der ersten Form und von c aus der zweiten. Wegen der Teilerfremdheit ist W durch $abc/\text{rad}(abc)$ teilbar. Andererseits hat W höchstens den Grad $\deg a + \deg b - 1$, also

$$\deg(abc) - n_0(abc) \leq \deg a + \deg b - 1,$$

woraus $\deg c \leq n_0(abc) - 1$ folgt (und ebenso für die beiden anderen).

Rechnung 5.2: in allen 600 Tripeln von Rechnung 4.1 war W nicht 0 und durch $abc/\text{rad}(abc)$ teilbar.

Beobachtung 5.3: ganze Zahlen haben nichts, was a' entspricht. Bei Polynomen trägt die Ableitung jede wiederholte Nullstelle „einmal weniger“ in W hinein, wo sie gegen die Schranke für den Grad aufgerechnet werden kann. Bei ganzen Zahlen gibt es keine greifbare Operation, die die Wiederholung einer Primzahl um eins senkt und sie so in eine andere Zahl trägt, dass es mit der Addition zusammenpasst——hier überträgt sich ein Schritt des Beweises für Polynome nicht auf ganze Zahlen.

6. Fermat für Polynome

Rechnung 6.1: für $n = 2$ ist $(1 - t^2)^2 + (2t)^2 = (1 + t^2)^2$ eine Lösung in teilerfremden Polynomen.

Beobachtung 6.2: für $n \geq 3$ gibt es keine Lösung in teilerfremden Polynomen. Wendet man Mason–Stothers auf $x^n + y^n = z^n$ an, mit D dem größten Grad von x, y, z , so ergibt sich $nD \leq n_0(xyz) - 1 \leq 3D - 1$. Mit $D \geq 1$ verlangt das $n < 3$ ——Fermat für Polynome folgt in einer Zeile. Fermat für ganze Zahlen brauchte mehr als dreihundert Jahre, bis zu Wiles' Beweis (1995).

7. Der Separator

Beobachtung 7.1: der Separator ist, ob es eine Ableitung gibt. Polynome haben eine; die Wronski-Determinante zählt wiederholte Nullstellen und macht die Ungleichung zu einem Satz. Ganze Zahlen haben keine Ableitung in dieser Rolle; die Ungleichung scheitert 1268-mal und überlebt als Vermutung mit dem Abstand ε ——dasselbe Zusammentreffen von Addition und Wiederholung spaltet sich in Satz und Vermutung, je nachdem, ob es eine Ableitung gibt.

Beobachtung 7.2: neben Aufsatz 236 und Aufsatz 640. In Aufsatz 236 maß die Wronski-Determinante die Dimension der Lösungsmenge einer Differentialgleichung. In Aufsatz 640 trug die Anzahl der Weisen, eine gerade Zahl als Summe zweier Primzahlen zu schreiben, Faktoren, die durch Reste bei der Division festgelegt sind——hier zählt dieselbe Wronski-Determinante die wiederholten Nullstellen von Polynomen und misst das Zusammentreffen der Addition $a + b = c$ mit der multiplikativen Struktur $\text{rad}(abc)$. Und wie in Aufsatz 640 ist das Zählen auf der Seite der ganzen Zahlen kein Beweis.

Beobachtung 7.3: was nicht gesagt wird. Die ABC-Vermutung wird nicht bewiesen, die Stichhaltigkeit von Mochizukis behauptetem Beweis wird nicht erörtert, und es wird nicht gesagt, „mit einer Ableitung wäre der Fall der ganzen Zahlen gelöst“——gezeigt werden die Zählung ganzzahliger Tripel, die Prüfungen der Ungleichung für Polynome und der Wronski-Determinante, und welcher Schritt des Beweises für Polynome sich nicht auf ganze Zahlen überträgt.

8. Namensaufruf und Schluss

1. **1268** Tripel mit $q > 1$ für $c < 10^6$ (Rechnung 2.1): **drei Zählweisen stimmen überein.**
2. **31** von **151895** mit $c < 10^3$ (Rechnung 2.1): **selten.**
3. **2** Tripel mit $q > 1.5$ für $c < 10^6$ (Rechnung 3.1): **das höchste ist 1.567887.**
4. $2 + 3^{10} \times 109 = 23^5$ mit **1.629912** (Rechnung 3.2): **das bekannte höchste.**
5. die Qualität der Familie nähert sich **1** (Rechnung 3.3): **1.292030 bis 1.056393.**
6. der Gehalt ist der Abstand ε (Beobachtung 3.4): **nicht das Überschreiten von 1.**
7. die Ungleichung für Polynome gilt in **600** Tripeln (Rechnung 4.1): **mit einer Familie der Gleichheit.**
8. was für ganze Zahlen scheitert, ist für Polynome ein Satz (Beobachtung 4.3): **der Kern.**
9. W teilbar durch $abc/\text{rad}(abc)$ (Rechnung 5.2): **der entscheidende Schritt.**
10. ganze Zahlen haben kein a' (Beobachtung 5.3): **Aufsatz 236 und Aufsatz 640.**

Schluss: Für teilerfremde $a + b = c$ gibt es Tripel, deren Qualität $q = \log c / \log \text{rad}(abc)$ die 1 übersteigt, 1268 mit $c < 10^6$, nur 2 übersteigen 1.5, und das bekannte höchste, $2 + 3^{10} \times 109 = 23^5$, hat 1.629912. Für Polynome scheitert dieselbe Ungleichung $\max \deg \leq n_0(abc) - 1$ nie (der Satz von Mason–Stothers)——ihr Beweis nutzt, dass die Wronski-Determinante $ab' - a'b$ durch den wiederholten Anteil der Nullstellen teilbar ist, und ganze Zahlen haben keine solche Ableitung. Der Separator ist, ob es eine Ableitung gibt. Unter die früheren Aufsätze gestellt——die Wronski-Determinante, die in Aufsatz 236 die Dimension der Lösungen maß, zählt hier wiederholte Nullstellen. Offen gesagt——weder ein Beweis der ABC-Vermutung noch die Stichhaltigkeit von Mochizukis Behauptung wird betreten, und die Zählung reicht nur bis $c < 10^6$.

Literatur

1. Granville, A., & Tucker, T. J. (2002). It's as easy as abc. *Notices of the American Mathematical Society*.
2. Mason, R. C. (1984). *Diophantine Equations over Function Fields*. Cambridge University Press.
3. Stothers, W. W. (1981). Polynomial identities and Hauptmoduln. *The Quarterly Journal of Mathematics*.
4. Yamagishi, Y. (2026). *One and the Same “= 0” Returns Five Different Kinds of Collection* [Aufsatz 236]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22129043
5. Yamagishi, Y. (2026). *The Number of Ways to Write an Even Number as a Sum of Two Primes Differs About Twofold by Whether It Is Divisible by 3* [Aufsatz 640]. Zenodo.

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)