

La conjecture ABC est un théorème pour les polynômes et une conjecture pour les entiers : il manque aux entiers la dérivée

— pour les polynômes, **max deg** ne dépasse jamais le nombre de racines distinctes moins 1 (le théorème de Mason–Stothers), donc la même inégalité n’échoue jamais — sa preuve utilise le fait que le wronskien $ab' - a'b$ est divisible par la partie répétée des racines, et les entiers n’ont pas de telle dérivée — [Article 641]

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japon

Septembre 2026

— *From thinking to syncing.* —

Résumé

Pour des entiers positifs premiers entre eux $a + b = c$, notons $\text{rad}(abc)$ le produit des nombres premiers distincts divisant abc , et définissons la qualité $q = \log c / \log \text{rad}(abc)$. La conjecture ABC dit que pour tout $\varepsilon > 0$, seuls un nombre fini de triplets ont $q > 1 + \varepsilon$. La même question peut être posée pour les polynômes, où c'est un théorème. Cet article ne démontre rien ; il compte les deux et les met côte à côte. Aucun théorème ni aucune loi nouvelle n'est revendiqué.

Premièrement, parmi les entiers il existe des triplets avec $q > 1$ —les triplets avec $q > 1$ sont au nombre de 6 pour $c < 10^2$, 31 pour 10^3 , 120 pour 10^4 , 418 pour 10^5 et 1268 pour 10^6 . Parmi les 151895 triplets premiers entre eux avec $c < 10^3$, il y en a 31, une proportion de 0.000204 (Section 2).

Deuxièmement, les triplets bien au-dessus de 1 sont rares—des 1268 triplets avec $c < 10^6$, 102 ont $q > 1.2$, 11 ont $q > 1.4$ et seulement 2 ont $q > 1.5$; le plus haut est $1 + 4374 = 4375$ à 1.567887. Le triplet connu pour la plus haute qualité, $2 + 3^{10} \times 109 = 23^5$, a **1.629912**. La famille $1 + (3^{2^k} - 1) = 3^{2^k}$ garde $q > 1$ pour $k = 1$ à 6, mais s'approche de 1, de 1.292030 en $k = 2$ à 1.056393 en $k = 6$ (Section 3).

Troisièmement, et c'est le cœur. Pour les polynômes, la même inégalité n'échoue jamais—pour des polynômes premiers entre eux $a + b = c$, $\max \deg$ ne dépasse pas le nombre de racines distinctes de abc moins 1 (le théorème de Mason–Stothers). Cette inégalité, pendant de $\log c \leq \log \text{rad}(abc)$ pour les entiers, n'a jamais échoué dans 600 triplets construits pour avoir des racines répétées, et la famille $a = x^n$, $c = (x + 1)^n$ a atteint l'égalité pour $n = 2$ à 8 (Section 4).

Quatrièmement, la preuve pour les polynômes utilise la dérivée, et les entiers n'ont pas de telle dérivée—le wronskien $W = ab' - a'b$ n'est pas 0 et est divisible $m - 1$ fois par chaque racine répétée avec le poids m . Dans les 600 triplets, W était divisible par $abc/\text{rad}(abc)$. Cette étape donne l'inégalité pour les polynômes. Les entiers n'ont rien qui corresponde à a' , et l'étape ne se transpose pas (Section 5).

Mots-clés : conjecture abc, radical, théorème de Mason-Stothers, polynômes, wronskien.

Portée (scope note) : Aucun théorème ni aucune loi nouvelle n'est revendiqué—la conjecture ABC (Masser et Oesterlé, vers 1985), le théorème pour les polynômes (Stothers 1981, Mason 1984), le triplet $2 + 3^{10} \times 109 = 23^5$ connu pour la plus haute qualité, et les dénombrements de triplets avec $q > 1$ sont tous connus. La conjecture ABC n'est pas démontrée—seuls les triplets jusqu'à $c < 10^6$ sont comptés, et compter n'est pas démontrer. Le bien-fondé de la preuve revendiquée par Mochizuki (2012) n'est pas discuté—on note seulement qu'elle n'a pas été largement acceptée dans la communauté mathématique. Il n'est pas dit qu'« avec une dérivée le cas des entiers serait résolu »—ce qui est montré, c'est seulement quelle étape de la preuve pour les polynômes ne se transpose pas aux entiers. Relation avec les articles précédents : l'Article 236 a mesuré la dimension de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle avec le wronskien—ici, le même wronskien compte les racines répétées des polynômes. L'Article 640 a compté que le nombre de façons d'écrire un nombre pair comme somme de deux nombres premiers porte des facteurs fixés par la division par de petits nombres premiers, et a noté que compter n'est pas démontrer—ici aussi, on compte la rencontre d'une addition $a + b = c$ avec la structure multiplicative $\text{rad}(abc)$. Ce qui est ajouté, c'est compter les triplets entiers jusqu'à 10^6 en confrontant trois manières de compter, vérifier l'inégalité pour les polynômes et la divisibilité du wronskien sur des triplets aléatoires, et placer le séparateur sur l'existence ou non d'une dérivée.

1. Notations et question

Entiers : pour des entiers positifs premiers entre eux $a < b$ et $c = a + b$, soit $\text{rad}(abc)$ le produit des nombres premiers distincts divisant abc , et définissons la qualité

$$q = \frac{\log c}{\log \text{rad}(abc)}.$$

$q > 1$ signifie $c > \text{rad}(abc)$. La conjecture ABC dit que pour tout $\varepsilon > 0$, seuls un nombre fini de triplets ont $q > 1 + \varepsilon$.

Polynômes : pour des polynômes premiers entre eux à coefficients complexes $a + b = c$ (non tous constants), soit $n_0(abc)$ le nombre de racines distinctes de abc . Le degré correspond au $\log c$ entier, et $n_0(abc)$ à $\log \text{rad}(abc)$.

Question : pourquoi la même question est-elle un théorème pour les polynômes et encore une conjecture pour les entiers ? La différence est examinée en nombres.

2. Compter les triplets entiers

Calcul 2.1 : les triplets ont été comptés par recherche exhaustive pour $c < 2000$, par un dénombrement qui restreint les candidats à l'aide de $\text{rad}(a) \text{rad}(b) \text{rad}(c) < c$ jusqu'à $c < 10^5$, et par une version plus rapide de la même restriction jusqu'à $c < 10^6$; à chaque étape les deux dénombrements ont donné exactement les mêmes triplets.

domaine de c	$< 10^2$	$< 10^3$	$< 10^4$	$< 10^5$	$< 10^6$
triplets avec $q > 1$	6	31	120	418	1268

Les 6 triplets avec $c < 100$ sont $1 + 8 = 9$, $1 + 48 = 49$, $1 + 63 = 64$, $1 + 80 = 81$, $5 + 27 = 32$ et $32 + 49 = 81$. Sur les 1501 triplets premiers entre eux avec $c < 100$, 6 ont $q > 1$ (une proportion de 0.003997) ; avec $c < 10^3$, 31 sur 151895 (une proportion de 0.000204).

Observation 2.2 : les triplets avec $q > 1$ existent, mais ils sont rares. Dans chacun d’eux, l’un de a , b , c contient le même nombre premier de nombreuses fois——pour que c dépasse $\text{rad}(abc)$, des nombres premiers doivent se répéter.

3. Triplets de haute qualité

Calcul 3.1 : les 1268 triplets avec $c < 10^6$ ont été rangés par qualité.

triplet	$\text{rad}(abc)$	q
$1 + 4374 = 4375$	210	1.567887
$343 + 59049 = 59392$	1218	1.547075
$121 + 255879 = 256000$	4290	1.488865
$37 + 32768 = 32805$	1110	1.482910
$1 + 2400 = 2401$	210	1.455673

Les triplets avec q au-dessus de 1.1, 1.2, 1.3, 1.4 et 1.5 sont au nombre de 379, 102, 29, 11 et 2.

Calcul 3.2 : le triplet connu pour la plus haute qualité, $2 + 3^{10} \times 109 = 23^5$ ($2 + 6436341 = 6436343$), a été vérifié. Il est premier entre eux, avec $\text{rad}(abc) = 15042$, $\log c = 15.677471$ et $\log \text{rad}(abc) = 9.618602$, ce qui donne $q = \mathbf{1.629912}$.

Calcul 3.3 : dans $1 + (3^{2^k} - 1) = 3^{2^k}$, $3^{2^k} - 1$ est divisible par 2^{k+2} , de sorte que $\text{rad}(abc)$ tombe sous c . Comme $3^{2^{k+1}} - 1 = (3^{2^k} - 1)(3^{2^k} + 1)$ et que le second facteur est pair, la puissance de 2 croît d’au moins un à chaque pas en k , et la famille se poursuit sans fin. La divisibilité a été vérifiée pour $k = 1$ à 6.

k	1	2	3	4	5	6
q	1.226294	1.292030	1.235303	1.155623	1.095349	1.056393

Observation 3.4 : il y a une infinité de triplets avec $q > 1$, mais la qualité de cette famille s'approche de 1. Ce que la conjecture ABC dit fini, c'est l'ensemble avec $q > 1 + \varepsilon$, non l'ensemble avec $q > 1$ — la substance de la conjecture n'est pas de dépasser 1, mais que dépasser 1 d'une marge fixe ne puisse se poursuivre indéfiniment.

4. Polynômes

Calcul 4.1 : a et b ont été construits à partir de puissances de petits polynômes de façon à avoir des racines répétées, avec $c = a + b$, et 600 triplets premiers entre eux ont été produits au hasard. Dans chaque triplet, $\max \deg \leq n_0(abc) - 1$ a été vérifié ; la plus petite valeur de $(n_0(abc) - 1) - \max \deg$ était 1, et la plus grande de $\max \deg / (n_0(abc) - 1)$ était 0.875000.

Calcul 4.2 : avec $a = x^n$, $c = (x + 1)^n$ et $b = c - a$, on a $n_0(abc) = n + 1$ pour $n = 2$ à 8, ce qui atteint l'égalité $\max \deg = n_0(abc) - 1$.

Observation 4.3 : c'est le cœur : l'inégalité qui échoue pour les entiers n'échoue jamais pour les polynômes. Pour les entiers, $\log c \leq \log \text{rad}(abc)$ a échoué 1268 fois avec $c < 10^6$. La même inégalité pour les polynômes, $\max \deg \leq n_0(abc) - 1$, n'a jamais échoué dans 600 triplets, atteignant l'égalité sans jamais la dépasser — ce qui reste une conjecture pour les entiers est, pour les polynômes, un théorème qui n'a même pas besoin de la marge ε .

5. L'étape clé : le wronskien

Observation 5.1 : la preuve pour les polynômes utilise le wronskien

$$W = ab' - a'b = ac' - a'c$$

(les deux formes coïncident parce que $c = a + b$). Si a a une racine x_0 de poids m , alors a et a' sont tous deux divisibles par $(x - x_0)^{m-1}$, et W l'est aussi. Il en va de même pour les racines de b d'après la première forme et de c d'après la seconde. Comme ils sont premiers entre eux, W est divisible par $abc/\text{rad}(abc)$. D'autre part, W est de degré au plus $\deg a + \deg b - 1$, donc

$$\deg(abc) - n_0(abc) \leq \deg a + \deg b - 1,$$

ce qui donne $\deg c \leq n_0(abc) - 1$ (et de même pour les deux autres).

Calcul 5.2 : dans les 600 triplets du Calcul 4.1, W n'était pas 0 et était divisible par $abc/\text{rad}(abc)$.

Observation 5.3 : les entiers n'ont rien qui corresponde à a' . Pour les polynômes, la dérivée porte chaque racine répétée dans W « une fois de moins », où elle peut être confrontée à la borne sur le degré. Pour les entiers, on ne dispose d'aucune opération qui abaisse d'un la répétition d'un nombre premier et la porte dans un autre nombre d'une manière qui s'accorde avec l'addition——c'est là qu'une étape de la preuve pour les polynômes ne se transpose pas aux entiers.

6. Fermat pour les polynômes

Calcul 6.1 : pour $n = 2$, $(1 - t^2)^2 + (2t)^2 = (1 + t^2)^2$ est une solution en polynômes premiers entre eux.

Observation 6.2 : pour $n \geq 3$ il n'y a pas de solution en polynômes premiers entre eux. En appliquant Mason–Stothers à $x^n + y^n = z^n$, avec D le plus grand degré de x, y, z , on obtient $nD \leq n_0(xyz) - 1 \leq 3D - 1$. Avec $D \geq 1$ cela exige $n < 3$ ——Fermat pour les polynômes suit en une ligne. Fermat pour les entiers a pris plus de trois cents ans, jusqu'à la preuve de Wiles (1995).

7. Le séparateur

Observation 7.1 : le séparateur est l'existence ou non d'une dérivée. Les polynômes en ont une ; le wronskien compte les racines répétées et fait de l'inégalité un théorème. Les entiers n'ont pas de dérivée dans ce rôle ; l'inégalité échoue 1268 fois et survit comme conjecture avec la marge ε ——la même rencontre de l'addition et de la répétition se scinde en théorème et en conjecture selon qu'il existe ou non une dérivée.

Observation 7.2 : à côté de l'Article 236 et de l'Article 640. Dans l'Article 236, le wronskien mesurait la dimension de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle. Dans l'Article 640, le nombre de façons d'écrire un nombre pair comme somme de deux nombres premiers portait des facteurs fixés par les restes de la division——ici, le même wronskien compte les racines répétées des polynômes et mesure la rencontre de l'addition $a + b = c$ avec la structure multiplicative $\text{rad}(abc)$. Et comme dans l'Article 640, compter du côté des entiers n'est pas démontrer.

Observation 7.3 : ce qui n'est pas dit. La conjecture ABC n'est pas démontrée, le bien-fondé de la preuve revendiquée par Mochizuki n'est pas discuté, et il n'est pas dit qu'« avec une dérivée le cas des entiers serait résolu »——ce qui est montré, ce sont le dénombrement des triplets entiers, les vérifications de l'inégalité pour les polynômes et du wronskien, et quelle étape de la preuve pour les polynômes ne se transpose pas aux entiers.

8. Appel et conclusion

1. 1268 triplets avec $q > 1$ pour $c < 10^6$ (Calcul 2.1) : trois manières de compter concordent.

2. **31 sur 151895** avec $c < 10^3$ (Calcul 2.1) : **rares.**
3. **2 triplets** avec $q > 1.5$ pour $c < 10^6$ (Calcul 3.1) : **le plus haut est 1.567887.**
4. **$2 + 3^{10} \times 109 = 23^5$ à 1.629912** (Calcul 3.2) : **le plus haut connu.**
5. **la qualité de la famille s’approche de 1** (Calcul 3.3) : **de 1.292030 à 1.056393.**
6. **la substance est la marge ϵ** (Observation 3.4) : **non le fait de dépasser 1.**
7. **l’inégalité pour les polynômes vaut dans 600 triplets** (Calcul 4.1) : **avec une famille d’égalité.**
8. **ce qui échoue pour les entiers est un théorème pour les polynômes** (Observation 4.3) : **le cœur.**
9. **W divisible par $abc/\text{rad}(abc)$** (Calcul 5.2) : **l’étape clé.**
10. **les entiers n’ont pas de a'** (Observation 5.3) : **Article 236 et Article 640.**

Conclusion : Pour $a + b = c$ premiers entre eux, les triplets dont la qualité $q = \log c / \log \text{rad}(abc)$ dépasse 1 sont au nombre de 1268 avec $c < 10^6$, seulement 2 dépassent 1.5, et le plus haut connu, $2 + 3^{10} \times 109 = 23^5$, a 1.629912. Pour les polynômes, la même inégalité $\max \deg \leq n_0(abc) - 1$ n’échoue jamais (le théorème de Mason–Stothers) —sa preuve utilise le fait que le wronskien $ab' - a'b$ est divisible par la partie répétée des racines, et les entiers n’ont pas de telle dérivée. Le séparateur est l’existence ou non d’une dérivée. Situé parmi les articles précédents — le wronskien qui mesurait la dimension des solutions dans l’Article 236 compte ici des racines répétées. Pour être honnête — ni une preuve de la conjecture ABC ni le bien-fondé de la revendication de Mochizuki ne sont abordés, et le dénombrement ne va que jusqu’à $c < 10^6$.

Références

1. Granville, A., & Tucker, T. J. (2002). It’s as easy as abc. *Notices of the American Mathematical Society*.
2. Mason, R. C. (1984). *Diophantine Equations over Function Fields*. Cambridge University Press.
3. Stothers, W. W. (1981). Polynomial identities and Hauptmoduln. *The Quarterly Journal of Mathematics*.
4. Yamagishi, Y. (2026). *One and the Same “= 0” Returns Five Different Kinds of Collection* [Article 236]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22129043
5. Yamagishi, Y. (2026). *The Number of Ways to Write an Even Number as a Sum of Two Primes Differs About Twofold by Whether It Is Divisible by 3* [Article 640]. Zenodo.

— From thinking to syncing. —

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)