

La congettura ABC è un teorema per i polinomi e una congettura per gli interi: agli interi manca la derivata

— per i polinomi **max deg** non supera mai il numero di radici distinte meno **1** (il teorema di Mason–Stothers), quindi la stessa disuguaglianza non fallisce mai — la sua dimostrazione usa il fatto che il wronskiano $ab' - a'b$ è divisibile per la parte ripetuta delle radici, e gli interi non hanno una tale derivata — [Articolo 641]

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Giappone

Settembre 2026

— *From thinking to syncing.* —

Sommario

Per interi positivi coprimi $a + b = c$, si scriva $\text{rad}(abc)$ per il prodotto dei primi distinti che dividono abc , e si definisca la qualità $q = \log c / \log \text{rad}(abc)$. La congettura ABC afferma che per ogni $\varepsilon > 0$ solo un numero finito di terne ha $q > 1 + \varepsilon$. La stessa domanda si può porre per i polinomi, dove è un teorema. Questo articolo non dimostra nulla; conta entrambi i casi e li mette fianco a fianco. Non si rivendica alcun teorema né alcuna legge nuova.

Primo, fra gli interi esistono terne con $q > 1$ ——le terne con $q > 1$ sono 6 con $c < 10^2$, 31 con 10^3 , 120 con 10^4 , 418 con 10^5 e 1268 con 10^6 . Fra le 151895 terne coprime con $c < 10^3$ ce ne sono 31, una frazione di 0.000204 (Sezione 2).

Secondo, le terne molto al di sopra di 1 sono rare——delle 1268 terne con $c < 10^6$, 102 hanno $q > 1.2$, 11 hanno $q > 1.4$ e solo 2 hanno $q > 1.5$; la più alta è $1 + 4374 = 4375$ a 1.567887. La terna nota per la qualità più alta, $2 + 3^{10} \times 109 = 23^5$, ha **1.629912**. La famiglia $1 + (3^{2^k} - 1) = 3^{2^k}$ mantiene $q > 1$ per $k = 1$ fino a 6, ma si avvicina a 1, da 1.292030 a $k = 2$ a 1.056393 a $k = 6$ (Sezione 3).

Terzo, ed è il nucleo. Per i polinomi la stessa disuguaglianza non fallisce mai——per polinomi coprimi $a + b = c$, $\max \deg$ non supera il numero di radici distinte di abc meno 1 (il teorema di Mason–Stothers). Questa disuguaglianza, controparte di $\log c \leq \log \text{rad}(abc)$ per gli interi, non è mai fallita in 600 terne costruite per avere radici ripetute, e la famiglia $a = x^n$, $c = (x + 1)^n$ ha raggiunto l'uguaglianza per $n = 2$ fino a 8 (Sezione 4).

Quarto, la dimostrazione per i polinomi usa la derivata, e gli interi non hanno una tale derivata——il wronskiano $W = ab' - a'b$ non è 0 ed è divisibile $m - 1$ volte per ogni radice ripetuta con peso m . In tutte le 600 terne, W era divisibile per $abc/\text{rad}(abc)$. Questo passo dà la disuguaglianza per i polinomi. Gli interi non hanno nulla che corrisponda ad a' , e il passo non si trasferisce (Sezione 5).

Parole chiave: congettura abc, radicale, teorema di Mason–Stothers, polinomi, wronskiano.

Portata (scope note): Non si rivendica alcun teorema né alcuna legge nuova——la congettura ABC (Masser e Oesterlé, intorno al 1985), il teorema per i polinomi (Stothers 1981, Mason 1984), la terna $2 + 3^{10} \times 109 = 23^5$ nota per la qualità più alta, e i conteggi delle terne con $q > 1$ sono tutti noti. La congettura ABC non viene dimostrata——si contano solo le terne fino a $c < 10^6$, e contare non è dimostrare. La validità della dimostrazione rivendicata da Mochizuki (2012) non viene discussa——si nota solo che non è stata ampiamente accettata nella comunità matematica. Non si dice che «con una derivata il caso degli interi sarebbe risolto»——ciò che si mostra è solo quale passo della dimostrazione per i polinomi non si trasferisce agli interi. Rapporto con gli articoli precedenti: l'Articolo 236 ha misurato la dimensione dell'insieme delle soluzioni di un'equazione differenziale con il wronskiano——qui lo stesso wronskiano conta le radici ripetute dei polinomi. L'Articolo 640 ha contato che il numero di modi di scrivere un numero pari come somma di due primi porta fattori fissati dalla divisione per piccoli primi, e ha notato che contare non è dimostrare——anche qui si conta l'incontro di un'addizione $a + b = c$ con la struttura moltiplicativa $\text{rad}(abc)$. Ciò che si aggiunge è contare le terne intere fino a 10^6 confrontando tre modi di contare, verificare la disuguaglianza per i polinomi e la divisibilità del wronskiano su terne casuali, e porre il separatore sull'esistenza o meno di una derivata.

1. Notazione e domanda

Interi: per interi positivi coprimi $a < b$ e $c = a + b$, sia $\text{rad}(abc)$ il prodotto dei primi distinti che dividono abc , e si definisca la qualità

$$q = \frac{\log c}{\log \text{rad}(abc)}.$$

$q > 1$ significa $c > \text{rad}(abc)$. La congettura ABC afferma che per ogni $\varepsilon > 0$ solo un numero finito di terne ha $q > 1 + \varepsilon$.

Polinomi: per polinomi coprimi a coefficienti complessi $a + b = c$ (non tutti costanti), sia $n_0(abc)$ il numero di radici distinte di abc . Il grado corrisponde al $\log c$ intero, e $n_0(abc)$ a $\log \text{rad}(abc)$.

Domanda: perché la stessa domanda è un teorema per i polinomi e ancora una congettura per gli interi? La differenza viene esaminata in numeri.

2. Contare le terne intere

Calcolo 2.1: le terne sono state contate con una ricerca esaustiva per $c < 2000$, con un conteggio che restringe i candidati usando $\text{rad}(a) \text{rad}(b) \text{rad}(c) < c$ fino a $c < 10^5$, e con una versione più veloce della stessa restrizione fino a $c < 10^6$; a ogni stadio i due conteggi hanno dato esattamente le stesse terne.

intervallo di c	$< 10^2$	$< 10^3$	$< 10^4$	$< 10^5$	$< 10^6$
terne con $q > 1$	6	31	120	418	1268

Le 6 terne con $c < 100$ sono $1 + 8 = 9$, $1 + 48 = 49$, $1 + 63 = 64$, $1 + 80 = 81$, $5 + 27 = 32$ e $32 + 49 = 81$. Di tutte le 1501 terne coprime con $c < 100$, 6 hanno $q > 1$ (una frazione di 0.003997); con $c < 10^3$, 31 su 151895 (una frazione di 0.000204).

Osservazione 2.2: le terne con $q > 1$ esistono, ma sono rare. In ciascuna, uno fra a , b , c contiene lo stesso primo molte volte——perché c superi $\text{rad}(abc)$, i primi devono ripetersi.

3. Terne di alta qualità

Calcolo 3.1: le 1268 terne con $c < 10^6$ sono state ordinate per qualità.

terna	$\text{rad}(abc)$	q
$1 + 4374 = 4375$	210	1.567887
$343 + 59049 = 59392$	1218	1.547075
$121 + 255879 = 256000$	4290	1.488865
$37 + 32768 = 32805$	1110	1.482910
$1 + 2400 = 2401$	210	1.455673

Le terne con q sopra 1.1, 1.2, 1.3, 1.4 e 1.5 sono 379, 102, 29, 11 e 2.

Calcolo 3.2: la terna nota per la qualità più alta, $2 + 3^{10} \times 109 = 23^5$ ($2 + 6436341 = 6436343$), è stata verificata. È coprime, con $\text{rad}(abc) = 15042$, $\log c = 15.677471$ e $\log \text{rad}(abc) = 9.618602$, il che dà $q = \mathbf{1.629912}$.

Calcolo 3.3: in $1 + (3^{2^k} - 1) = 3^{2^k}$, $3^{2^k} - 1$ è divisibile per 2^{k+2} , cosicché $\text{rad}(abc)$ scende sotto c . Poiché $3^{2^{k+1}} - 1 = (3^{2^k} - 1)(3^{2^k} + 1)$ e il secondo fattore è pari, la potenza di 2 cresce di almeno uno a ogni passo in k , e la famiglia prosegue senza fine. La divisibilità è stata verificata per $k = 1$ fino a 6.

k	1	2	3	4	5	6
q	1.226294	1.292030	1.235303	1.155623	1.095349	1.056393

Osservazione 3.4: ci sono infinite terne con $q > 1$, ma la qualità di questa famiglia si avvicina a 1. Ciò che la congettura ABC dice finito è l'insieme con $q > 1 + \varepsilon$, non l'insieme con $q > 1$ ——la sostanza della congettura non è superare 1, ma che superare 1 di un margine fisso non possa continuare per sempre.

4. Polinomi

Calcolo 4.1: a e b sono stati costruiti da potenze di piccoli polinomi in modo da avere radici ripetute, con $c = a + b$, e 600 terne coprimi sono state prodotte a caso. In ogni terna valeva $\max \deg \leq n_0(abc) - 1$; il valore più piccolo di $(n_0(abc) - 1) - \max \deg$ era 1, e il più grande di $\max \deg / (n_0(abc) - 1)$ era 0.875000.

Calcolo 4.2: con $a = x^n$, $c = (x + 1)^n$ e $b = c - a$, si ha $n_0(abc) = n + 1$ per $n = 2$ fino a 8, raggiungendo l'uguaglianza $\max \deg = n_0(abc) - 1$.

Osservazione 4.3: questo è il nucleo: la disuguaglianza che fallisce per gli interi non fallisce mai per i polinomi. Per gli interi, $\log c \leq \log \text{rad}(abc)$ è fallita 1268 volte con $c < 10^6$. La stessa disuguaglianza per i polinomi, $\max \deg \leq n_0(abc) - 1$, non è mai fallita in 600 terne, raggiungendo l'uguaglianza ma senza mai oltrepassarla——ciò che per gli interi resta una congettura è, per i polinomi, un teorema che non ha bisogno nemmeno del margine ε .

5. Il passo chiave: il wronskiano

Osservazione 5.1: la dimostrazione per i polinomi usa il wronskiano

$$W = ab' - a'b = ac' - a'c$$

(le due forme coincidono perché $c = a + b$). Se a ha una radice x_0 con peso m , sia a sia a' sono divisibili per $(x - x_0)^{m-1}$, e così W . Lo stesso vale per le radici di b dalla prima forma e di c dalla seconda. Essendo coprimi, W è divisibile per $abc/\text{rad}(abc)$. D'altra parte, W ha grado al più $\deg a + \deg b - 1$, dunque

$$\deg(abc) - n_0(abc) \leq \deg a + \deg b - 1,$$

da cui $\deg c \leq n_0(abc) - 1$ (e analogamente per gli altri due).

Calcolo 5.2: in tutte le 600 terne del Calcolo 4.1, W non era 0 ed era divisibile per $abc/\text{rad}(abc)$.

Osservazione 5.3: gli interi non hanno nulla che corrisponda ad a' . Per i polinomi la derivata porta ogni radice ripetuta in W «una volta di meno», dove può essere messa a confronto con il limite sul grado. Per gli interi non si ha a disposizione alcuna operazione che abbassi di uno la ripetizione di un primo e la porti in un altro numero in un modo compatibile con l'addizione——è qui che un passo della dimostrazione per i polinomi non si trasferisce agli interi.

6. Fermat per i polinomi

Calcolo 6.1: per $n = 2$, $(1 - t^2)^2 + (2t)^2 = (1 + t^2)^2$ è una soluzione in polinomi coprimi.

Osservazione 6.2: per $n \geq 3$ non c'è soluzione in polinomi coprimi. Applicando Mason–Stothers a $x^n + y^n = z^n$, con D il grado massimo di x, y, z , si ottiene $nD \leq n_0(xyz) - 1 \leq 3D - 1$. Con $D \geq 1$ ciò richiede $n < 3$ ——Fermat per i polinomi segue in una riga. Fermat per gli interi ha richiesto più di trecento anni, fino alla dimostrazione di Wiles (1995).

7. Il separatore

Osservazione 7.1: il separatore è se ci sia una derivata. I polinomi ne hanno una; il wronskiano conta le radici ripetute e trasforma la disuguaglianza in un teorema. Gli interi non hanno una derivata in quel ruolo; la disuguaglianza fallisce 1268 volte e sopravvive come congettura con il margine ε ——lo stesso incontro di addizione e ripetizione si divide in teorema e congettura a seconda che ci sia o no una derivata.

Osservazione 7.2: accanto all'Articolo 236 e all'Articolo 640. Nell'Articolo 236 il wronskiano misurava la dimensione dell'insieme delle soluzioni di un'equazione differenziale. Nell'Articolo 640 il numero di modi di scrivere un numero pari come somma di due primi portava fattori fissati dai resti della divisione——qui lo stesso wronskiano conta le radici ripetute dei polinomi e misura l'incontro dell'addizione $a + b = c$ con la struttura moltiplicativa $\text{rad}(abc)$. E come nell'Articolo 640, contare dal lato degli interi non è dimostrare.

Osservazione 7.3: ciò che non si dice. La congettura ABC non viene dimostrata, la validità della dimostrazione rivendicata da Mochizuki non viene discussa, e non si dice che «con una derivata il caso degli interi sarebbe risolto»——ciò che si mostra è il conteggio delle terne intere, le verifiche della disuguaglianza per i polinomi e del wronskiano, e quale passo della dimostrazione per i polinomi non si trasferisce agli interi.

8. Appello e chiusura

1. 1268 terne con $q > 1$ per $c < 10^6$ (Calcolo 2.1): tre modi di contare concordano.
2. 31 su 151895 con $c < 10^3$ (Calcolo 2.1): rare.

3. 2 terne con $q > 1.5$ per $c < 10^6$ (Calcolo 3.1): la più alta è 1.567887.
4. $2 + 3^{10} \times 109 = 23^5$ a 1.629912 (Calcolo 3.2): la più alta nota.
5. la qualità della famiglia si avvicina a 1 (Calcolo 3.3): da 1.292030 a 1.056393.
6. la sostanza è il margine ϵ (Osservazione 3.4): non il superare 1.
7. la disuguaglianza per i polinomi vale in 600 terne (Calcolo 4.1): con una famiglia di uguaglianza.
8. ciò che fallisce per gli interi è un teorema per i polinomi (Osservazione 4.3): il nucleo.
9. W divisibile per $abc/\text{rad}(abc)$ (Calcolo 5.2): il passo chiave.
10. gli interi non hanno a' (Osservazione 5.3): Articolo 236 e Articolo 640.

Chiusura: Per $a + b = c$ coprime, le terne la cui qualità $q = \log c / \log \text{rad}(abc)$ supera 1 sono 1268 con $c < 10^6$, solo 2 superano 1.5, e la più alta nota, $2 + 3^{10} \times 109 = 23^5$, ha 1.629912. Per i polinomi la stessa disuguaglianza $\max \deg \leq n_0(abc) - 1$ non fallisce mai (il teorema di Mason–Stothers)——la sua dimostrazione usa il fatto che il wronskiano $ab' - a'b$ è divisibile per la parte ripetuta delle radici, e gli interi non hanno una tale derivata. Il separatore è se ci sia una derivata. Collocato fra gli articoli precedenti——il wronskiano che nell’Articolo 236 misurava la dimensione delle soluzioni qui conta radici ripetute. Detto onestamente——non si entra né in una dimostrazione della congettura ABC né nella validità della rivendicazione di Mochizuki, e il conteggio arriva solo fino a $c < 10^6$.

Bibliografia

1. Granville, A., & Tucker, T. J. (2002). It’s as easy as abc. *Notices of the American Mathematical Society*.
2. Mason, R. C. (1984). *Diophantine Equations over Function Fields*. Cambridge University Press.
3. Stothers, W. W. (1981). Polynomial identities and Hauptmoduln. *The Quarterly Journal of Mathematics*.
4. Yamagishi, Y. (2026). *One and the Same “= 0” Returns Five Different Kinds of Collection* [Articolo 236]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22129043
5. Yamagishi, Y. (2026). *The Number of Ways to Write an Even Number as a Sum of Two Primes Differs About Twofold by Whether It Is Divisible by 3* [Articolo 640]. Zenodo.

— From thinking to syncing. —

Yuuki YAMAGISHI (山岸 勇輝)